Т. Ю. ДЮМИНА, А. А. МАХОНИНА
(Волгоград)

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ ПОИСКУ ИДЕИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Освещена проблема реализации методической системы обучения решению алгебраических и геометрических задач различными способами как средства повышения качества математического образования школьников. Выделены и описаны основные цели и методика обучения школьников решению математических задач различными способами.

Ключевые слова: *цель обучения, методика обучения решению задач, способ решения задачи, система задач.*

В педагогической и методической литературе общепринятым считается мнение о том, что решение задач различными способами является эффективным педагогическим приемом, поскольку это способствует повышению уровня математических знаний и умений учащихся, развитию их исследовательских способностей, пробуждает творческую фантазию и интерес к изучению математики. Однако если данный прием применять бессистемно и неорганизованно, решая каждый раз, когда это возможно, задачи разными способами, то это может привести и к обратному результату: потере у учащихся интереса к изучаемому, неосознанности выполняемых ими действий, бесполезной трате времени. Перед тем, как предложить учащимся какую-либо задачу, учитель должен досконально изучить ее сам: установить возможные связи с другими задачами, отыскать различные способы решения и выявить целесообразность рассмотрения этих способов для конкретной педагогической ситуации.

На одну задачу, решаемую разными способами, можно смотреть как на своеобразную систему, удовлетворяющую всем предъявляемым к ней требованиям. Такие системы задач в зависимости от типа или этапа урока, специфики рассматриваемых способов решения позволяют добиться различных целей при условии правильной организации работы с ними [1].

Можно выделить *пять основных целей* решения одной задачи разными способами или методами:

1) выявление межпредметных связей: алгебра – геометрия, тригонометрия – геометрия и др.;

2) обобщение и систематизация полученных знаний, установление связей между различными теоретическими фактами;

3) выявление сущности определенных методов, их отличительных черт, достоинств и недостатков при применении к конкретным классам задач;

4) вооружение учащихся различными методами решения задач с целью обретения ими уверенности в своих силах, возможности в случае затруднения перейти к другому приему решения;

5) демонстрация рациональности, эффективности и изящества одних и нерациональности и порою ошибочности других способов.

В соответствии с выделенными целями определяются целесообразность и место данных систем задач в учебном процессе, разрабатывается методика их применения и решения [3].

Рассмотрим на конкретных примерах, как решение одной задачи разными способами или методами может помочь в осуществлении каждой из перечисленных целей.

Выявление межпредметных связей способствует осознанному усвоению учащимися материала, убеждению их в силе математических методов, которые могут быть использованы в разных областях знаний, поэтому имеет смысл проводить интегрированные уроки, например алгебры и геометрии.

Пример 1. Вычислите $tg\,(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5})$.

Способ 1 (алгебраический)

Пусть $\arcsin\frac{3}{5}$ – это какой-то угол α. Тогда задача заключается в нахождении $tg\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Воспользуемся формулами понижения степени:

$$tg = \frac{\alpha}{2} \quad \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} \ .$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \ .$$

Тогда $\quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1-\frac{4}{5}}}{\sqrt{1+\frac{4}{5}}} = \frac{1}{3} \ .$

С п о с о б 2 (геометрический)

Воспользуемся понятиями синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, теоремой Пифагора и свойством биссектрисы треугольника (рис. 1).

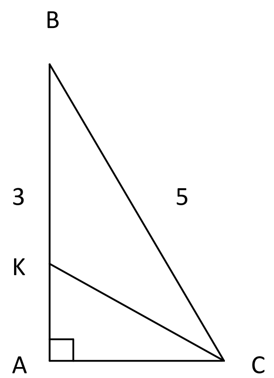

Рис. 1

В прямоугольном треугольнике ABC AB = 3, BC = 5 и CK – биссектриса угла BCA. По теореме Пифагора AC = 4, а по свойству биссектрисы треугольника AK = $\frac{4}{3}$.

Получаем, что $tg(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}) = \frac{AK}{AC} = \frac{1}{3}$.

Важно также сопоставлять арифметический и алгебраический способы решения одной и той же задачи.

При *обобщении и систематизации знаний* решение задач разными способами позволяет охватить большой теоретический материал, установить связи между изучаемыми понятиями и фактами.

Пример 2. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 10 и боковой стороной 13 (рис. 2).

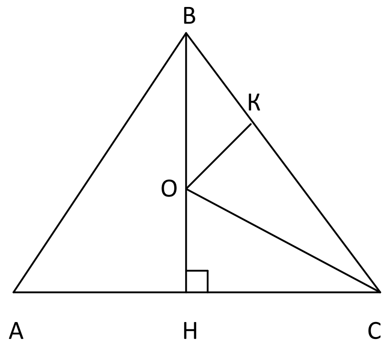

Рис. 2

Способ 1 (использование свойства биссектрисы треугольника)

По теореме Пифагора находим, что ВН = 12. Из треугольника ВСН имеем:

$\frac{BC}{CH} = \frac{BO}{OH}$, т.е. $\frac{13}{5} = \frac{12-r}{r}$. Отсюда, $r = \frac{10}{3}$.

Способ 2 (использование понятия синуса острого угла прямоугольного треугольника)

Из треугольника ВСН находим $\sin \angle HBC = \frac{5}{13}$. Затем из треугольника ВКО имеем: ОК = ВО$\cdot \sin\alpha$, т.е. $r = (12-r)\cdot\frac{5}{13}$, откуда $r = \frac{10}{3}$.

Способ 3 (использование свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности)

Согласно указанному свойству, СН = СК = 5. Значит, ВК = 13 – 5 = 8.

ВО = 12 – r

Из треугольника ВКО по теореме Пифагора имеем:

$(12-r)^2 = r^2 + 8^2$, откуда $r = \frac{10}{3}$.

Способ 4 (использование формулы S = pr)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = 60$$

$$p = \frac{13+13+10}{2} = 18$$

Следовательно, $r = \frac{S}{p} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$.

Для достижения третьей цели, т.е. *выявления сущности отдельных методов*, необходима их демонстрация на какой-либо одной задаче. Обычно разные методы демонстрируют на разных задачах, учитывая при этом, какой из них в каждом конкретном случае более эффективен. При таком подходе метод может невольно связаться с самой задачей, а его сущность и значимость остаются на втором плане. Когда же разные методы испробованы на одной задаче, то у учащихся появляется возможность оценить их, сравнить, уяснить их особенности. Рассмотрим пример, когда к геометрической задаче применяется векторный, координатный и собственно геометрический методы решения.

Пример 3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна ее половине.

Метод 1 (векторный)

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 3).

$\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$. Тогда медиана $\overline{AK}$ по правилу сложения векторов равна $\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$, а гипотенуза $\overline{BC} = \overline{b} - \overline{a}$, значит $\overline{KC} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}$.

Необходимо доказать, что длины векторов $\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$ и $\frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}$ равны, т.е. $\left|\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}\right| = \left|\frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}\right|$ или $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \left|\overline{b}-\overline{a}\right|$.

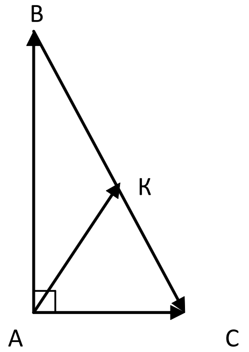

Рис. 3

Возведем обе части этого равенства в квадрат: $\left|\overline{a}^2 + 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2\right| = \left|\overline{b}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{a}^2\right|$. Поскольку векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$. Отсюда получаем равенство $\left|\overline{a}^2 + \overline{b}^2\right| = \left|\overline{b}^2 + \overline{a}^2\right|$, которое является верным.

Таким образом, $\left|\overline{AK}\right| = \left|\overline{KC}\right|$, т.е. $AK = \frac{1}{2}BC$.

Метод 2 (координатный)

Примем точку A за начало прямоугольной системы координат, а стороны AB и AC поместим на координатных осях (рис. 4).

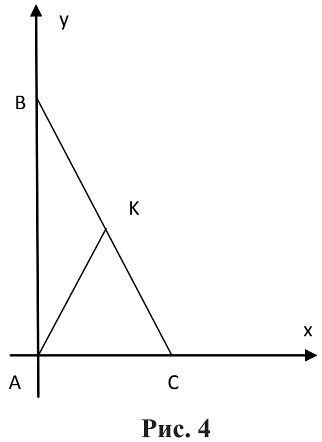

Рис. 4

Зададим координаты точек: A(0; 0), C(b; 0), B(0; c). Точка К – середина отрезка ВС, значит, ее координаты равны К $(\frac{b}{2};\frac{c}{2})$. Вычислим длины отрезков ВС и АК.

|BC|= $\sqrt{(b-0)^2+(0-c)^2}=\sqrt{b^2+c^2}$;

|AK|= $\sqrt{(\frac{b}{2}-0)^2+(\frac{c}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}}=\frac{\sqrt{b \ \ +c}}{2}$.

Следовательно, |AK| = |BC|.

М е т о д 3 (геометрический)

На луче АК отложим отрезок КМ, равный АК (рис. 5). Получим, что четырехугольник АВМС является параллелограммом, т. к. ВК = КС и АК = КМ. Поскольку $\angle$ А = 90^0, то АВМС – прямоугольник, значит ВС = АМ.

Получаем, что $AK=\frac{1}{2}BC$.

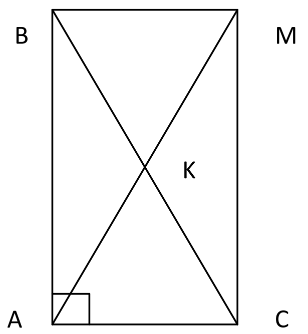

Рис. 5

Чтобы учащиеся были *уверены в своих силах* при решении задач и могли *переходить от одного приема к другому*, необходимо уже при объяснении нового материала рассматривать несколько способов получения верного результата.

Пример 4. Решите уравнение: $x^2+2|x|-3=0$.

С п о с о б 1 (аналитический)

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+2x-3=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

При решении этой совокупности получаем корни: x = 1 и x = –1.

С п о с о б 2 (замена переменной)

Применяя свойство модуля $|a|^2=a^2$, перепишем уравнение в следующем виде:

$|x|^2+2|x|-3=0$.

Сделаем замену: $|x|=t$. Получим уравнение:

$t^2+2t-3=0$, откуда $t=1, t=-3$.

Имеем: $|x| = 1$, т.е. $x = \pm 1$.

$|x| = -3$ – нет решений.

С п о с о б 3 (графический)

Построим график функции $y = x^2 + 2|x| - 3 = 0$ (рис. 6).

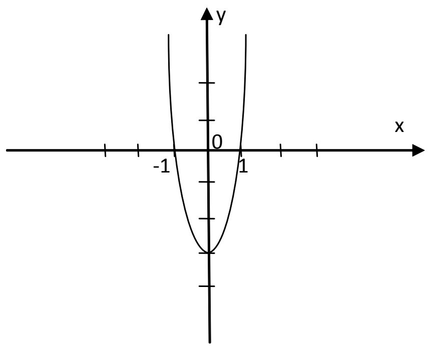

Рис. 6

Получаем корни: x = 1 и x = –1.

Для достижения пятой цели необходимо подбирать такие задачи, способы решения которых значительно отличаются в плане их *эффективности и рациональности*.

Пример 5. Имеется лом стали двух сортов, причем первый сорт содержит 10% никеля, а второй 30%. На сколько тонн стали больше нужно взять второго сорта, чем первого, чтобы получить 200 т стали с содержанием никеля 25%?

С п о с о б 1 (алгебраический)

Пусть первого сорта нужно взять x тонн, а второго y тонн. Тогда в стали первого сорта содержится 0,1x тонн никеля, а в стали второго сорта 0,3y тонн никеля. Поскольку в новом сплаве никеля стало 25%, т.е. 0,25·200 = 50 т, то получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 50 \end{cases}$$

Из этой системы находим, что x = 50, а y = 150. Значит, стали второго сорта нужно взять на 100 т. больше.

С п о с о б 2 (старинный)

Найдем разность между процентным содержанием никеля в каждом из двух сортов стали и полученном сплаве:

25% – 10% = 15%

30% – 25% = 5%

Полученные результаты показывают, что 10%-ного сплава следует взять 5 частей, а 30%-ного – 15 частей. Отсюда легко находится, что нужно взять 50 тонн стали первого сорта и 150 тонн стали второго сорта. Таким образом, получаем более простой и изящный способ решения, который может применяться при решении подобных задач.

Итак, мы рассмотрели несколько примеров решения задач разными способами. Еще раз обратим внимание на то, что их специфика зависит от целей, поставленных учителем. Теперь обратимся к *методике использования* таких систем задач на уроках математики [2]. Очевидно, что особенности методики также связаны с целями решения одной задачи разными способами.

Для достижения первой цели, т.е. выявления межпредметных связей, необходимо на первых порах проводить интегрированные уроки. На таких уроках рассматриваются две-три задачи, решаемые разными способами. При этом не следует перед учащимися просто ставить проблему отыскания нескольких способов решения. Нужно четко указать им, что данная задача имеет несколько приемов решения (например, алгебраический и геометрический), а затем подробно остановиться на каждом из них. Если у учащихся возникают трудности, то учитель может наводящими вопросами подвести их к идее решения.

В дальнейшем, когда у учащихся сформируется определенный навык перехода от одной области знаний к другой, можно отказаться от интегрированных уроков. Выявление межпредметных связей следует проводить на обычном уроке, предлагая учащимся самостоятельно найти несколько способов решения одной задачи.

При обобщении и систематизации знаний помощь учителя в отыскании разных способов решения одной задачи должна быть минимальной. Необходимо четко поставить перед учащимися цель: решить задачу двумя, тремя, четырьмя и т.д. способами. Работа может проходить самостоятельно или в группах.

При самостоятельной работе учащимся дается определенное время на решение задачи, после чего каждый из них сообщает, сколько способов ее решения им было найдено. Затем к доске выходит любой из учащихся, нашедших только один способ решения задачи, и демонстрирует его. После этого учитель выясняет, кто еще из учащихся «увидел» этот способ, и вызывает к доске следующего учащегося для показа другого способа и т.д.

Примерно также может быть построена работа в группах. Каждая группа ищет как можно больше способов решения какой-либо задачи, после чего подводятся итоги и происходит демонстрация способов. В классах с невысоким уровнем подготовки учитель каждой группе может дать задание решить задачу каким-то конкретным способом. Затем представители групп показывают свои способы решения, происходит обсуждение их достоинств и недостатков.

Если поставлена цель познакомить учащихся с различными методами решения задач, то на первых порах самостоятельность учащихся минимальна. Сначала учитель показывает сущность основных методов, приводит различные примеры. Следующим важным шагом является демонстрация применения различных методов при решении одной и той же задачи. Это позволит учащимся сопоставить изученные методы, провести их сравнительную характеристику, выявить преимущества того или иного метода при решении определенных задач.

Когда учащиеся в достаточной мере овладеют различными методами решения задач, необходимо увеличить степень их самостоятельности. Учащиеся должны при минимальной помощи учителя уметь применять разные методы к решению одной задачи, делать выводы о целесообразности их использования в каждом конкретном случае, грамотно аргументировать свою позицию.

Для достижения четвертой цели учителю необходимо уже при объяснении нового материала вводить различные способы решения одного и того же типа задач (например, аналитический и графический способы решения уравнений с параметром). В классах с высоким уровнем подготовки учащиеся могут принимать непосредственное участие в поиске таких способов. В классах с невысоким уровнем подготовки учитель сам демонстрирует разные способы решения какого-то вида задач. И в том, и в другом случае необходимо, чтобы учащиеся проанализировали и сопоставили возможные способы, выявили их достоинства и недостатки. Полезно предлагать учащимся задания по предварительному выбору способа решения той или иной задачи в зависимости от ее содержания.

В том случае, когда необходимо выявить рациональность и правильность отдельных способов решения задачи, учащимся дается самостоятельное задание по поиску этих способов. Такая работа, с одной стороны, развивает исследовательские способности учащихся, а с другой – позволяет осознать ошибочность каких-либо действий.

Так, при решении уравнений и разборе возможных способов используемых преобразований учитель может организовать дискуссию, в процессе которой поднимаются вопросы о равносильности уравнений и тождественных преобразованиях, нарушающих область допустимых значений уравнения. Такой прием будет гораздо более эффективным, чем просто озвучивание учителем этих вопросов. Знания, полученные учащимися при такой работе, станут осознанными и прочными.

Таким образом, методика использования педагогического приема решения одной задачи разными способами в значительной степени зависит от целевого компонента методической системы обучения учащихся решению математических задач различными способами.

Литература

1. Дюмина Т. Ю. Содержательный компонент методической системы обучения будущих учителей математики конструированию систем задач : дис. … канд. пед. наук. Волгоград, 2006.
2. Дюмина Т. Ю., Маньшин М. Е. Система задач по математической логике: формирование интеллектуальной компетентности студентов // Изв. Волгогр. пед. ун-та. 2012. № 7(71). С. 77–80.
3. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике : в 2 ч. Ч. 2 : Обучение математике через задачи и обучение решению задач. М. : Просвещение, 1977.

Teaching pupils to search for the answer of a geometric task by different ways

There is covered the issue of implementation of a methodological system of teaching to search for the answer of algebraic and geometric tasks by different ways as the means of quality improvement of mathematical education at school. There are sorted out and described the main goals and methodology of teaching pupils to solve mathematic tasks by different ways.

Key words: *educational goal, methodology of teaching to solve tasks, way of task solution, system of tasks.*