Н. Ю. МИЛОВАНОВ
(Волгоград)

ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКТОВ КАК УСЛОВИЕ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

Рассмотрены проблема изучения курса начал анализа и способ ее решения. Проанализировано содержание школьных учебников с точки зрения наличия графической интерпретации фактов. Приведены примеры достаточного признака возрастания и убывания функции, теоремы Ферма, теоремы Вейерштрасса в графической интерпретации.

Ключевые слова: *преемственность обучения, математический анализ, графическая интерпретация, график функции.*

Математический анализ – раздел математики, в котором числовые функции изучаются средствами дифференциального и интегрального исчислений. Возникновение математического анализа и его роль в науке связаны с тем, что аппарат данного раздела является инструментом изучения закономерных связей между величинами.

При изучении начал анализа обучающиеся сталкиваются с рядом трудностей логического характера, проистекающих из самой сущности математического анализа, из особенностей его понятий и метода. При разработке методики изучения отдельных вопросов курса и всего курса в целом эти трудности необходимо иметь в виду; не уделив им достаточного внимания, едва ли можно рассчитывать на полноценное усвоение курса всеми обучающимися [2].

Условно школьный курс начал анализа можно разделить на три части: теория пределов, дифференциальное исчисление и интегральное исчисление. При изучении начал математического анализа обычно ограничиваются лишь отдельными его элементами. Первое знакомство с данным разделом математики связано с исследованием поведения функции не только во всей ее области определения, но и около конкретной точки. Такой анализ практически всегда связан с понятием предела функции – основным понятием теории пределов. Затем изучается производная – важная математическая модель, являющаяся объектом изучения дифференциального исчисления, построение которой основано на понятии предела. И только после этого переходят к изучению интегрального исчисления.

По стандарту среднего (полного) общего образования по математике, в разделе начал математического анализа изложено, что у обучающихся должны быть сформированы такие понятия, как предел последовательности, непрерывность функции, производная функции, определенный интеграл. Обучающиеся должны знать физический и геометрический смысл производной; производные элементарных функций; формулу Ньютона-Лейбница; уметь вычислять сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии; писать уравнение касательной к графику функции; находить производные суммы, разности, произведения, частного, сложной функции; применять производную к исследованию функции и построению графиков; находить первообразную функции. Обучающиеся также должны быть ознакомлены с примерами использования производной и интеграла для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах [5].

Данный материал богат содержанием, но проблема изучения заключается не только в сложности изучения материала, но и в нехватке времени. В связи с этим перед учителем встает выбор строгости изложения материала.

А. Г. Мордкович выделяет четыре уровня изложения начал математического анализа в школьном курсе математики:

1) принятие на веру (когда, например, ученикам сообщают, что сформулированная теорема доказана в математике, но мы принимаем ее без доказательства, поскольку оно по объективным причинам непосильно школьникам);

2) наглядно-интуитивный уровень – замена доказательства геометрическими иллюстрациями или рассуждениями «на пальцах»;

3) правдоподобные рассуждения (например, использование вместо доказательства конкретного примера, в котором фактически раскрывается идея формального доказательства);

4) формально строгое доказательство [4].

В школе учителя не могут строго излагать теорию математического анализа, т.к. доказательства фактов данного раздела математики сложны для восприятия обучающихся и, как правило, выбирают 1-й или 2-й уровни строгости изложения материала. Вузовские преподаватели обычно используют академический стиль изложения: вводят определения понятий, доказывают их свойства, при этом редко показывают графическую интерпретацию. В результате обучающиеся теряют связь изучаемого материала в школе и в вузе, следовательно, требуется соблюдать преемственность изучаемого материала. Для того чтобы обеспечить преемственность курса, преподавателям вуза следует начинать вводить понятия и получать необходимые факты, как и в школе, с графической интерпретации и только после этого переходить к строгому доказательству.

Надо помнить, что в процессе обучения у школьников развивается как абстрактно-теоретическое, так и наглядно-действенное и наглядно-образное виды мышления, при этом они развиваются в тесном взаимодействии. Как указывает Н. А. Менчинская, это взаимодействие наглядного и абстрактного мышления начинается с мысленного образования наглядных образов на основе словесного текста, в форме перевода на язык образов содержания, описанного в словах. Взаимодействие наглядного и абстрактного мышления развивается и совершенствуется в процессе обучения.

Эти особенности мышления человека уже давно, начиная с времен Я. А. Коменского, учтены в одном из основных принципов обучения – принципе наглядности, в соответствии с которым обучение строится на конкретных образах, непосредственно воспринимаемых обучающимися. Общий вывод, к которому приходит А. Н. Леонтьев в исследовании проблемы наглядности в обучении, состоит в том, что место и роль наглядного материала в процессе обучения определяются отношением деятельности обучающихся с наглядным материалом к той деятельности, которая составляет суть процесса обучения. Это значит, что целесообразность использования тех или иных средств наглядности зависит от того, способствует ли деятельность, направленная на освоение этой наглядности, другой деятельности (основной) по овладению учащимися знаниями, ради усвоения которых и используются эти средства наглядности [6]. Именно поэтому в изложении школьного курса математического анализа преимущество имеет графическая интерпретация представления фактов.

Проведем анализ учебников алгебры и начала анализа на наличие графической интерпретации математических фактов.

В *учебнике Ш. А. Алимова* при рассмотрении темы «Возрастание и убывание функции» даны два чертежа, на одном из которых представлена возрастающая функция, на другом – убывающая. Выбирается по одной точке, к которой будет проведена касательная, и предлагается сделать вывод об угловом коэффициенте. Данный пример с методической точки зрения считается некорректным, т.к. обучающимся заметить данный факт очень сложно из-за рассмотрения только одного примера (одной проведенной касательной). Дальше в учебнике приводятся соответствующие теоремы без доказательств, после этого (уже с полным доказательством) дается теорема Лагранжа и графически показывается ее смысл. Затем рассматривается вопрос об экстремумах функции. Следует отметить, что теоремы о максимальном и минимальном значениях функции являются неполными: пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, $x_0 \in (a;b)$ и $f'(x_0)=0$, тогда если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x)>0$ слева от точки x_0 и $f'(x)<0$ справа от точки x_0, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$ [1].

Обучающиеся уже знают, что существуют функции, которые непрерывны, но не дифференцируемы на заданном отрезке, к примеру функция $y=|x|$ в точке (0; 0). Тем самым отбрасывается целый класс функций, хотя при графической интерпретации данного факта обучающиеся могли бы сформулировать теорему в ее полном варианте.

При изучении темы «Наибольшее и наименьшее значение» автор дает чертеж функции, по которому обучающиеся должны сразу же сделать вывод данного факта, без каких либо вариантов, и в конечном итоге просто сообщает им алгоритм нахождения данных значений. В разделе данного учебника, посвященном интегральному исчислению, имеющиеся чертежи относятся только к нахождению площадей криволинейных трапеций в конкретных примерах.

Анализ *учебника авторского коллектива под руководством А. Н. Колмогорова* показал, что практически все факты начал математического анализа имеют доказательства и только после этого в некоторых случаях дается графическая интерпретация. Следует отметить, что есть такие пункты параграфов: «Пример функции, не являющейся непрерывной» (в этом пункте рассматривается функция дробной части числа), «Пример функции, непрерывной, но не дифференцируемой в данной точке» (рассматривается функция модуля). Так же, как и в предыдущем учебнике, приведена формула Лагранжа с графической интерпретацией. Благодаря данной формуле доказываются теоремы о возрастании и убывании функции и теорема Ферма, но не дается графическая интерпретация. Необходимое условие экстремума также не являются полной, как и в предыдущем учебнике. При изучении темы «Наибольшее и наименьшее значения функции» графическая интерпретация решения данной задачи рассматривается только для возрастающей и убывающей функций.

Перейдем к рассмотрению *учебника С. М. Никольского*. В его содержании курс начал анализа строго можно поделить на теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисления. Характерно, что при изучении производной функции в данном учебнике приводятся теорема Ролля и, как следствие, теорема Лагранжа, сопровождаемые графической интерпретацией. При изложении темы «Возрастание и убывание функции» обучающимся сначала предлагается теорема о нахождении промежутков возрастания и убывания и только после этого рассматриваются чертежи, как в учебнике А. Н. Колмогорова. В параграфе «Экстремум функции с единственной точкой» рассматриваются случаи, когда функция имеет максимум или минимум и точку, подозрительную на экстремум. К данным рассуждениям приведены графические интерпретации, после чего выводится теорема. В параграфе «Задачи на максимум и минимум» графических интерпретаций фактов нет, а рассматриваются конкретные примеры. При изложении темы «Площадь криволинейной трапеции» автор к своим рассуждениям прилагает чертеж, который отображает смысл действий и рассуждения.

Учебник под редакцией А. Г. Мордковича отличает большое количество чертежей. При изучении темы «Исследование функций на монотонность» автор сразу предлагает рассмотреть два графика, на одном из которых изображена возрастающая функция, на другом – убывающая. Проводится несколько касательных, и внимание обучающихся акцентируется на угловых коэффициентах данных касательных, после чего формулируются две теоремы.

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X [3].

При изучении теорем об экстремумах функциях сначала дается несколько чертежей для рассмотрения факта и после этого выводится теорема:

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует [3].

Данная теорема, в отличие от приведенных в вышерассмотренных учебниках, является корректной и позволяет обучающимся находить экстремумы для ранее известных функций. При рассмотрении тех же чертежей формулируются достаточные условия экстремума, но нет точной графической интерпретации данных фактов, что может ввести в заблуждение обучающихся.

После изложенной темы автор переходит к параграфу «Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин». В данном разделе рассматривается конкретный пример функции $y = \frac{x}{1+x^2}$. При помощи графика находятся наибольшие и наименьшие значения функции. Без доказательств принимается теорема Вейерштрасса, и рассматриваются примеры данной теоремы для функций, у которых наибольшее и наименьшее значения совпадают с концами рассматриваемого отрезка. Как и в предыдущем учебнике, при изучении темы «Определенный интеграл» автор начинает с рассмотрения задачи о вычислении площади криволинейной трапеции и при помощи графика объясняет смысл определенного интеграла и правила его нахождения.

Можно сказать, что последний рассмотренный учебник, автором которого является А. Г. Мордкович, выделяется среди других учебников по алгебре и началам анализа именно наличием графической интерпретации фактов. Некоторые сложные для восприятия теоремы принимаются без доказательств, но присутствуют различные графические примеры, которые показывают их справедливость.

Чтобы обеспечить преемственность изучения курса начал анализа, вузовский преподаватель обязан опираться на сложившиеся геометрические образы. Работа по изучению новых понятий должна начинаться с коррекции имеющихся образов ранее изученных фактов анализа, необходимо еще больше чертежей и графических интерпретаций, включающих все возможные случаи данных фактов, что позволит напомнить обучающимся об известных из школьного курса понятиях и о необходимости использования того или иного факта при поставленной задаче.

Изучение основных понятий математического анализа в вузе должно строиться поэтапно: от наглядно-графических образов следует переходить к получению понятий, теорем и других фактов анализа и после этого проводить строгое доказательство. Рассмотрение основных понятий математического анализа (таких, как «непрерывность», «монотонность», «производная» и т.д.) проходит успешнее, если на этапе ознакомления с ними перенести внимание обучающихся с формального, логически строгого и точного определения понятия на наглядные, интуитивные представления об этом понятии. Такой испытанный наглядный образ, как график функции, следует использовать не только в целях закрепления знаний о тех или иных понятиях и методах, но и в пропедевтических целях. Здесь необходимо добиваться того, чтобы упоминание о данном понятии ассоциировалось в первую очередь с соответствующим наглядно-графическим образом. Такой уровень усвоения, когда можно проиллюстрировать утверждения на графиках, вполне доступен большинству обучающихся. Переход от наглядно-интуитивного представления к формальному определению – это второй этап в формировании устойчивого представления о том или ином понятии. Поскольку это представление при таком подходе будет базироваться на наглядном образе, обучающиеся должны более осознанно, уверенно и с меньшим количеством ошибок усматривать различные свойства исследуемых функций, применять изученные понятия к решению задач [2].

Рассмотрим некоторые факты из начал математического анализа в графической интерпретации.

1. Достаточный признак возрастания функции. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Для данного случая построим возрастающую функцию и выберем несколько точек, через которые будут проходить касательные (рис. 1).

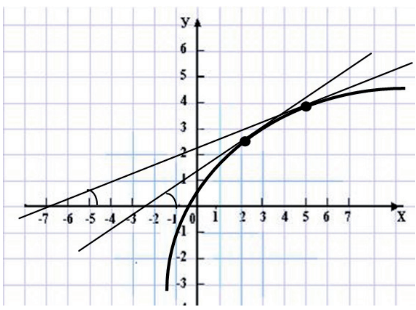

Рис. 1

Для начала следует провести актуализацию знаний по геометрическому смыслу производной, после этого приступить к графической интерпретации данной теоремы. Необходимо, чтобы обучающиеся заметили знак углового коэффициента касательной. Можно также предложить им самостоятельно выбрать еще несколько точек и провести касательные, это позволит убедиться, что у возрастающей функции угловой коэффициент касательной положительный.

2. Достаточный признак убывания функции. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

Здесь также необходимо провести актуализацию знаний по геометрическому смыслу производной, после этого приступить к графической интерпретации данной теоремы. Необходимо, чтобы обучающиеся заметили знак углового коэффициента касательной (рис. 2). Он, в отличие от предыдущего случая, является отрицательным. И снова можно предложить обучающимся самостоятельно выбрать еще несколько точек и провести касательные, это позволит убедиться, что у убывающей функции угловой коэффициент касательной отрицательный.

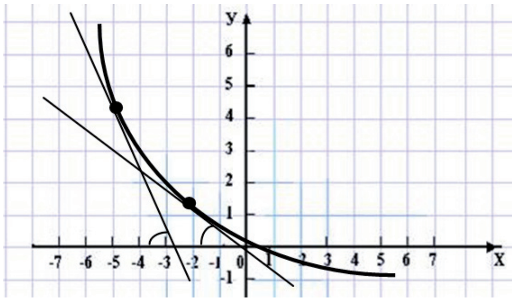

Рис. 2

3. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма). Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.

Для данной теоремы также необходима актуализация знаний по геометрическому смыслу производной. Рассматривать следует чертеж, на котором будет изображена функция, имеющая несколько экстремумов и хотя бы одну точку, в которой производная функции не существует, но экстремум имеется (рис. 3).

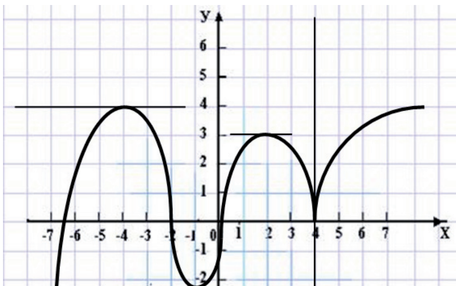

Рис. 3

Следует предложить обучающимся провести касательные во всех точках экстремума и назвать значение их угловых коэффициентов. Графически видно, что там, где функция плавно сменила возрастание на убывание или наоборот, касательная параллельна оси абсцисс, что свидетельствует о равенстве угловых коэффициентов касательных в данных точках нулю.

Особое внимание необходимо уделить той точке, в которой функция «резко» сменила возрастание на убывание (или наоборот) и графически выглядит как пик. В данной точке касательная имеет уравнение $x = a$, что вообще не является функцией по определению, т.е. производная функции не существует. Этот же пример наглядно показывает обучающимся, что непрерывная функция в точке может не иметь производной, на этом также следует сделать акцент, поскольку в учебной литературе для старшеклассников предлагается в основном только функция модуля $y = |x|$, обладающая данным свойством.

4. Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.

Для данной теоремы лучше рассмотреть четыре случая, когда функция 1) задана уравнением $y = a$ (рис. 4); 2) является убывающей на всем рассматриваемом отрезке (рис. 5); 3) является возрастающей на всем рассматриваемом отрезке (рис. 6); 4) имеет интервалы возрастания и убывания на заданном отрезке (рис. 7). Все функции будем рассматривать на отрезке [*a; b*].

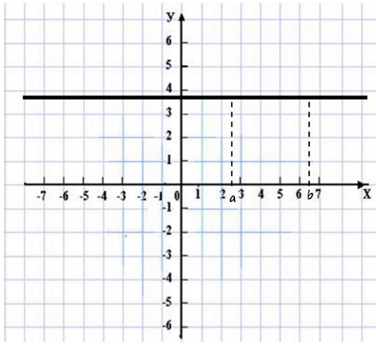

Рис. 4

Работая с чертежом, изображенным на рис. 4, обучающиеся могут заметить, что значения функции в любой точке данного отрезка одинаковые, следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке существуют, и они равны, к примеру $f(a)$.

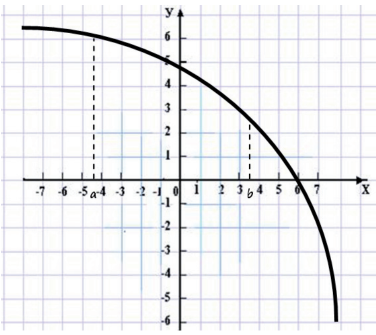

Рис. 5

Работая с функцией, изображенной на рис. 5, обучающиеся могут заметить: чем правее точка находится на данном отрезке, тем меньше значение функции в данной точке, тем самым наибольшее значение будет равно $f(a)$, а наименьшее $f(b)$.

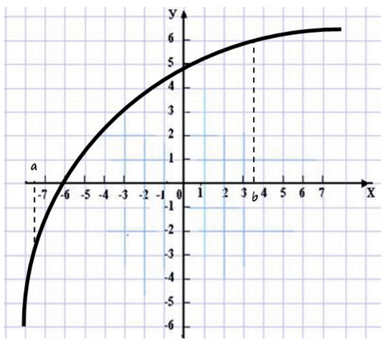

Рис. 6

Далее переходим к работе с рис. 6. Рассуждения аналогичные: чем правее точка находится на данном отрезке, тем больше значение функции в данной точке, тем самым наибольшее значение будет равно $f(b)$, а наименьшее $f(a)$.

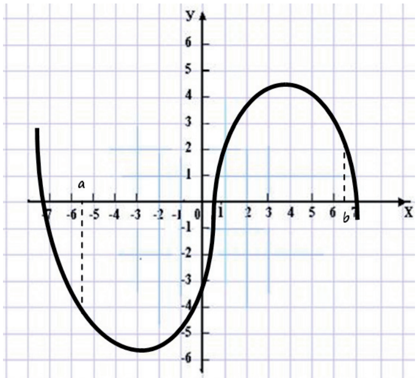

Рис. 7

Рассмотрим функцию, изображенную на рис. 7. Здесь функция уже имеет несколько экстремумов на данном отрезке. В предыдущих примерах были рассмотрены концы отрезка, и сразу делались выводы о наибольшем и наименьшем значениях. В данном случае функция тоже имеет наибольшее значение, но оно совпадает с точкой максимума функции, а наименьшее значение функции – с минимумом функции на данном отрезке. Другими словами, данный случай еще раз наглядно показывает выполнение теоремы Вейерштрасса и наглядность алгоритма нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке. Поскольку наибольшее и наименьшее значения в этом примере совпали с экстремумами функции на данном отрезке, то это еще раз доказывает применение производной для описания некоторых свойств функции.

Не следует забывать, что курс математического анализа требует от обучающихся большой фантазии для представления тех или иных понятий. Если каждое новое введенное понятие данного курса, будь то в школе или в вузе, будет начинаться с графической интерпретации данного понятия или факта, то обучающийся получит представление об этом и при решении поставленной задачи сразу сможет применять знания, «не запутавшись» в них. При этом необходимо помнить, что в школьном курсе данный раздел математики называется «начала анализа», что является пропедевтикой изучения курса математического анализа, поэтому в большинстве случаев достаточно рассмотреть графическую интерпретацию факта со всеми возможными ее случаями и принять без доказательств. В вузе же от преподавателя следует ожидать аналогичного подхода: сначала показать графическую интерпретацию, чтобы обучающиеся вспомнили сам факт и могли объяснить его, а уже после этого провести строгое доказательство, ссылаясь на уже пройденные определения и теорем. Таким образом, использование графической интерпретации основных математических фактов является одним из условий обеспечения преемственности обучения математическому анализу между школой и вузом.

Литература

1. Алимов Ш. А. Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин. М. : Просвещение, 2007.
2. Глаголева Е. Г. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе : сб. ст. / сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов. М. : Просвещение, 1980.
3. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : в 2 ч. Ч. 1 : Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). М. : Мнемозина, 2009.
4. Мордкович А. Г. Беседы с учителем математики : учеб.-метод. пособие. М. : Оникс 21 век: Мир и образование, 2005.

5. Стандарт среднего (полного) общего образования по математике (любое изд.).
6. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии. М. : Просвещение, 1983.

Graphic interpretation of mathematic facts as the condition of succession of mathematical analysis teaching at school and higher school

There is considered the issue of algebraic analysis and the way of solution. There are analyzed the contents of school textbooks from the point of view of graphic interpretation of facts. There are given the examples of sufficient signs of increase and decrease of functions, Fermat theorem, Weierstrass theorem in the graphic interpretation.

Key words: *succession of education, mathematical analysis, graphic interpretation, graphic of function.*