В.А. ЛЕЦКО, В.А. ДЗЮБЕНКО
(Волгоград)

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ С ОДИНАКОВЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Рассматриваются цепочки последовательных натуральных чисел, имеющих фиксированное количество делителей. Улучшены оценки сверху и снизу для максимально возможной длины таких цепочек. Найдены 14 последовательных чисел, каждое из которых имеет в точности 24 делителя.

Ключевые слова: *количество делителей, последовательные натуральные числа, equidivisible numbers.*

Функция $\boldsymbol{M(k)}$

Вопрос о последовательных натуральных числах, имеющих одинаковое количество делителей, уже исследовался в работе [3]. В работах [5] и [6] доказана бесконечность множества пар соседних натуральных чисел, имеющих поровну делителей, и исследован вопрос о частотности таких пар. В нашей работе усилен ряд оценок, приведенных в работе [3], а также найдены точные значения максимально возможной длины цепочек последовательных чисел, каждое из которых имеет ровно k делителей, для многих конкретных значений k.

Обозначим через $\tau(n)$ количество натуральных делителей натурального числа n. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ – каноническое разложение числа n. Тогда количество его натуральных делителей вычисляется по известной формуле

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_i + 1)$$

Отсюда следует, что если $\tau(n)$ нечётно, то n является точным квадратом, и наоборот, если n – квадрат, то $\tau(n)$ нечётно. Далее нам потребуется этот факт.

Легко видеть, что для каждого натурального числа k количество последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет ровно k натуральных делителей, ограничено сверху. Следуя работе [3], через $M(k)$ обозначим максимально возможное количество последовательных натуральных чисел, имеющих ровно k делителей.

Очевидно, что $M(k) = 1$ для любого нечётного k, ведь квадраты не могут идти последовательно. Таким образом, нас интересуют только четные k. Ясно, что $M(2) = 2$: единственную пару последовательных простых чисел образуют числа 2 и 3.

В работе [3] найдены некоторые общие оценки для $M(k)$ сверху, а также оценки $M(k)$ для некоторых конкретных значений k. Для нескольких четных k указаны точные значения $M(k)$: $M(4) = 3$; $M(6) = 5$; $M(8) = 7$; $M(10) = 3$; $M(14) = 3$; $M(16) = 7$.

Оценки сверху для $\boldsymbol{M(k)}$

Как уже отмечалось, для каждого конкретного k значение $M(k)$ ограничено сверху. Приведем такие оценки.

Лемма 1. *Пусть d – наименьшее натуральное число, не делящее k. Тогда $M(k) \le 2^d - 1$.*

Доказательство. Среди 2^d последовательных чисел найдется число, которое делится на 2^{d-1}, но не делится на 2^d. Количество делителей такого числа не может быть равно k. □

Лемма 2. *Пусть s – показатель степени, с которым число 2 входит в каноническое разложение k. Тогда $M(k) \le 2^{2^s+1} - 1$.*

Доказательство. Среди 2^{2^s+1} последовательных чисел найдутся два числа, различающихся 2^{2^s}, каждое из которых делится на 2^{2^s-1}, но не делится на 2^{2^s}. Обозначим меньшее из этих чисел через a, а большее через b. Тогда $a = 2^{2^s-1}a_1$, $b = 2^{2^s-1}b_1$, где a_1 и b_1 нечётны.

Учитывая взаимную простоту множителей и мультипликативность функции числа делителей, получим:

$$\tau(a) = \tau\left(2^{2^s-1}a_1\right) = \tau\left(2^{2^s-1}\right)\tau(a_1) = 2^s\tau(a_1);$$
$$\tau(b) = \tau\left(2^{2^s-1}b_1\right) = \tau\left(2^{2^s-1}\right)\tau(b_1) = 2^s\tau(b_1);$$

Пусть $\tau(a) = \tau(b) = k$. Тогда $\tau(a_1)$ и $\tau(b_1)$ нечётны, а значит, a_1 и b_1 являются точными квадратами. Но $a + 2^{2^s} = b$, т.е. $2^{2^s-1}a_1 + 2^{2^s} = 2^{2^s-1}b_1$ и $a_1 + 2 = b_1$. Но квадратов с разницей 2 не существует. Значит, a и b не могут одновременно иметь по k делителей и $M(k) \leq 2^{2^s+1} - 1$. □

Комбинируя идеи лемм 1 и 2, часто удается получить более сильные оценки. Пусть, например, $k = 12$. Каждая из лемм по отдельности дает оценку $M(12) \leq 31$. Но, согласно лемме 1, среди последовательных чисел, имеющих по 12 делителей, не может быть числа, сравнимого с 16 по модулю 32, а согласно лемме 2, среди этих чисел не могут одновременно находиться числа, сравнимые с 8 и 24. Поэтому последовательные числа, имеющие по 12 делителей, могут принадлежать классам вычетов по модулю 32, либо, начиная с класса 17 и заканчивая классом 7, либо, начиная с класса 25 и заканчивая классом 15. В любом случае получается не более 23 последовательных чисел. Отметим, что именно оценка $M(12) \leq 23$ приведена в работе [3].

Однако и эта оценка не окончательная. Во-первых, заметим, что первый из приведенных выше вариантов не проходит, поскольку число, сравнимое с 24 по модулю 32 не может иметь 12 делителей. В самом деле, если $\tau(n) = 12$ и $n \equiv 24 (mod\, 32)$, то $n = 8x^2$, но сравнение $8x^2 \equiv 24 (mod\, 32)$ не имеет решений. Поэтому, если существует цепочка из 23 последовательных чисел, имеющих по 12 делителей, то эти числа по модулю 32 должны принадлежать классам $25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$.

Число в позиции 0 обязательно делится на 32, значит, оно имеет вид $32p$, где p – простое. Воспользовавшись приведёнными выше рассуждениями, получим, что число на месте 8 имеет вид $8q^2$, где q – простое. Если оно кратно 3, то оно равно 72. Но соседи числа 72 имеют по 2 делителя. Не может также делиться на 3 и число в позиции 7, поскольку сравнение $8x^2 \equiv 1 (mod\, 3)$ не имеет решений. Получается, на 3 должно делиться число в позиции 9, а значит, и число $32p$. Но тогда оно равно 96, и последовательности не получается. Значит, числа в позиции 0 и в позиции 8 не могут находиться вместе в такой последовательности. Придётся снова «отбросить» 8 чисел слева или справа. Таким образом, доказана

Лемма 3. $M(12) \leq 15$. □

Приведем еще один результат, получаемый одновременным применением лемм 1 и 2.

Лемма 4. *Пусть* $k = 2s$*, где* s *нечетно и не кратно 3. Тогда* $M(k) \leq 5$.

На основании леммы 1 последовательные числа, имеющие по k делителей, должны принадлежать следующим классам вычетов по модулю 8: $5, 6, 7, 0, 1, 2, 3$. Но на основании леммы 2 числа в позициях 6 и 2 не могут одновременно входить в требуемую цепочку. □

Замечание. Отметим (это потребуется нам в дальнейшем), что именно число в позиции 6 не может входить в цепочку одновременно с числом в позиции 0. Ведь число в позиции 6 должно быть удвоенным квадратом, но сравнение $2x^2 + 2 \equiv 0 \ (mod\ 8)$ не имеет решений.

Найдем оценку $M(k)$ сверху для случая, когда число k является произведением двойки, тройки и большого простого числа.

Теорема 5. *Пусть* $p \geq 3$ *– простое число. Тогда* $M(6p) \leq 5$.

Случай $p = 3$ уже рассмотрен в нашей работе [7], поэтому можно считать, что $p \geq 5$.

Согласно лемме 2, $M(6p) \leq 7$. Так же, как в замечании к лемме 4 делаем вывод, что цепочка из семи чисел, имеющих по $6p$ делителей (если она существует) должна начинаться с числа, сравнимого с 7 по модулю 8.

Обозначим $p - 1 = e$ (e – четно). Тогда последовательность примет вид указанный в таблице 1 (r_i, s_i обозначают некоторые простые множители числа в i-той позиции). Отметим, что в ячейках таблицы представлены не все возможные виды канонического разложения соответствующих чисел. Так, число в позиции 0 также может иметь вид 2^{6p-1}, $2^{3p-1}r_0$, $2^{2p-1}r_0^2$, $2^e r_0^5$, $2^5 r_0^e$. Числа в позициях 2 и 4 также могут иметь меньше различных простых делителей. В каждом из этих случаев рассуждения, приведенные ниже, позволяют сделать те же выводы, но на более ранней стадии рассуждения.

Таблица 1

$\boldsymbol{n\ mod}$ **8**	7	0	1	2	3	4	5
n		$2^e r_0^2 s_0$		$2r_2^e s_2^2$		$4r_4^e s_4$	

Сравнение $2x^2 \equiv 1(mod\ 3)$ не имеет решений, поэтому число в позиции 1 не может быть кратно 3. Остаётся два варианта.

1. Число в позиции 2 делится на 3.

Тогда оно обязательно делится на 9, а число в позиции 7 имеет вид $3x^2$. Но сравнение $3x^2 + 3 \equiv 0(mod\ 9)$ неразрешимо. Поэтому число в позиции 7 не может входить в искомую цепочку.

Оставшиеся шесть чисел представлены в таблице 2.

Таблица 2

$\boldsymbol{n\ mod\ 8}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
n	$2^e r_0^2 s_0$		$2 \cdot 3^e s_2^2$ или $2 \cdot 9 r_2^e$		$4 r_4^e s_4$	$3 r_5^e s_5^2$

По крайней мере, одно из шести последовательных чисел должно делиться на 5. Поскольку сравнения $2x^2 \equiv 1(mod\ 5)$ и $2x^2 \equiv -1(mod\ 5)$ неразрешимы, числа в позициях 1 и 3 не кратны 5. Аналогично, из неразрешимости сравнения $3x^2 \equiv 1(mod\ 5)$ следует, что число в позиции 4 тоже не кратно 5.

Если число в позиции 2 кратно 5, то оно равно $50 \cdot 3^e$ или $18 \cdot 5^e$. В каждом из этих случаев оно будет гораздо меньше, например, числа в позиции 4 и, следовательно, не может входить в искомую цепочку.

Остается вариант, при котором кратны 5 будут числа в позициях 0 и 5. В этом случае число в позиции 5 обязано делиться на 25. Следовательно, число в позиции 0 имеет вид $5x^2$. Но сравнение $5x^2 + 2 \equiv 0(mod\ 3)$ неразрешимо. Поэтому число в позициях 0 и 5 не могут одновременно входить в искомую цепочку.

Таким образом, в первом случае имеем $M(6p) \leq 5$.

2. Число в позиции 3 делится на 3.

Допустим сначала, что это число не кратно 9 (таблица 3).

Таблица 3

$\boldsymbol{n\ mod\ 8}$	**7**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
n		$2^e \cdot 9 s_0$ или $2^e \cdot 3 r_0^2$		$2 r_2^e s_2^2$	$3 r_3^e s_3^2$	$4 r_4^e s_4$	

Из того, что $2x^2$ и $3x^2$ не могут быть сравнимы ни с 1, ни с 4 по модулю 5, простым перебором получаем, что числа в позициях 0 и 5 делятся на 5. Тогда в позиции 0 стоит либо число $45 \cdot 2^e$, либо число $75 \cdot 2^e$. В любом из этих случаев данное число заведомо меньше чисел, стоящих в позициях 2, 3 и 4. Поэтому число в позиции 0, не может входить в искомую цепочку.

Теперь допустим, что число в позиции 3 кратно 9 (таблица 4).

Таблица 4

$\boldsymbol{n\ mod\ 8}$	**7**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
n		$2^e \cdot 3r_0^2$		$2r_2^e s_2^2$	$3^e r_3^2 s_3$ или $9r_3^e s_3$	$4r_4^e s_4$	

Двойка в любой чётной степени – это 1 по модулю 3. Поэтому $2^e \cdot x^2 \equiv x^2 (mod\, 3)$. Но тогда сравнение $2^e \cdot 3x^2 + 3 \equiv 0 (mod\, 9)$ сводится к сравнению $x^2 \equiv 2 (mod\, 3)$, не имеющему решений. Следовательно, числа в позициях 0 и 3 не могут находиться в одной последовательности.

Окончательно получаем $M(6p) \leq 5$. □

В частности, из теоремы 5 следует, что $M(30) \leq 5$, в то время как в работе [3] приведена более слабая оценка $M(30) \leq 7$.

Теорема 6. *Пусть $p, q \geq 5$ – простые числа. Тогда $M(2pq) \leq 4$.*

Прежде всего, заметим, что если $\tau(n) = 2pq$, то в каноническое разложение n входит не более трех различных простых чисел.

Из леммы 4 следует, что $M(2pq) \leq 5$, и соответствующая пятерка (если она существует) по модулю 8 должна иметь вид $7, 0, 1, 2, 3$. Обозначим эти числа через n_7, n_0, n_1, n_2 и n_3 соответственно.

Для n_2 имеется всего два возможных разложения: $2r_2^{pq-1}$, $2r_2^{p-1}s_2^{q-1}$. В любом случае n_2 является удвоенным квадратом. Поэтому n_1 не может делиться на 3. Рассмотрим две оставшихся возможности.

1. На 3 делится число n_2. Тогда оно делится и на 9. Но тогда в каноническое разложение числа n_7 тройка входит в точности в первой степени и n_7 является утроенным квадратом. Но сравнение $3x^2 + 3 \equiv 0 (mod\, 9)$ не разрешимо. Поэтому числа n_7 и n_2 не могут одновременно входить в искомую пятерку.

2. На 3 делится число n_3.

2.1. Допустим, что n_3 делится и на 9. Тогда в разложение числа n_0 тройка обязана входить в первой степени. Рассмотрим возможные канонические разложения числа n_0: 2^{2pq-1}, $2^{pq-1}r_0$, $2^{2p-1}r_0^{q-1}$, $2^{p-1}r_0^{2q-1}$, $2^{p-1}r_0^{q-1}s_0$. Тройка в первой степени может входить только во второе и пятое разложения. Для второго разложения получаем соотношение $3 \cdot 2^{pq-1} + 3 \vdots 9$. Учитывая, четность числа $pq - 1$, легко убедиться, что это невозможно. Для пятого разложения, учитывая четность числа $q - 1$, получаем сравнение $3 \cdot 2^{p-1}x^2 + 3 \equiv 0\ (mod\, 9)$. С учетом четности числа $p - 1$ предыдущее сравнение равносильно сравнению $x^2 + 1\ \equiv 0\ (mod\, 3)$. Но это сравнение не имеет решений. Поэтому числа n_0 и n_3 не могут одновременно входить в искомую пятерку.

2.2. Пусть тройка входит в каноническое разложение n_3 в первой степени.

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 5, придем к выводу, что n_0 должно быть кратно 5. Из перечисленных выше разложений n_0 это возможно только для последнего разложения. При этом получается, что n_0 равно $2^{p-1} \cdot 3^{q-1} \cdot 5$ или $2^{p-1} \cdot 5^{q-1} \cdot 3$. В каждом из этих случаев n_0 будет гораздо меньше числа n_1. Следовательно, числа n_0 и n_3 вновь не могут одновременно входить в искомую пятерку. □

Düntsch и Eggleton (см. [3]) показали, что для каждого простого числа $p \geq 5$ имеет место оценка $M(2p) \leq 3$. Нам удалось распространить эту оценку на некоторые другие k.

Теорема 7. *Пусть простые числа* p *и* q *таковы, что НОД* $p-1$ *и* $q-1$ *кратен 4 и больше 4. Тогда* $M(2pq) \leq 3$.

Будем придерживаться обозначений введенных при доказательстве теоремы 6.

Из теоремы 6 следует, что, если четверка последовательных чисел, имеющих по $2pq$ делителей, существует, то она должна включать в себя числа n_0 и n_2. Причем n_0 имеет не более трех различных простых делителей, а n_2 имеет одно из следующих разложений: $2r_2^{pq-1}, 2r_2^{p-1}s_2^{q-1}$. Из условия следует, что в каждом из этих случаев $n_2 = 2a^{4e}$, где $e > 1$.

Для числа в позиции 0 справедливо равенство $n_0 = n_2 - 2 = 2(a^{4e} - 1) =$ $= 2(a^{2e} - 1)(a^{2e} + 1) = 2(a^e - 1)(a^e + 1)(a^{2e} + 1)$. В каноническое разложение числа $a^{2e} + 1$ двойка входит в первой степени, а НОД чисел $a^e - 1$ и $a^e + 1$ равен 2 и других общих множителей у выражений в скобках нет. Ровно одно из чисел $a^e - 1$ и $a^e + 1$ делится на высшую степень двойки. Однако ни одно из них не может быть степенью двойки. Это следует из теоремы Михайлеску (бывшей гипотезы Каталана, доказанной Mihăilescu в 2002 году, см. [8]). Согласно этой теореме, 8 и 9 – единственная пара последовательных натуральных чисел, каждое из которых является нетривиальной степенью. То, что a^e не может равняться 9, проверяется непосредственно. Таким образом, в каноническое разложение числа n_0 входит число 2 и еще, по крайней мере, три различных простых числа. Но это невозможно. Поэтому числа n_0 и n_2 не могут одновременно входить в цепочку последовательных чисел, имеющих по $2pq$ делителей. □

Следствие 8. *Пусть* p *– простое число, сравнимое с 1 по модулю 4. Тогда* $M(2p^2) \leq 3$.

Если $p > 5$, то данное утверждение сразу следует из теоремы 7.

Остается рассмотреть случай $p = 5$. Число n_2 (мы продолжаем придерживаться обозначений, принятых при доказательстве теорем 6 и 7) может быть представлено в виде $2x^4$.

Число n_0 имеет одно из следующих канонических разложений 2^{49}, 2^4r^4s, $2^{24}r$, 2^9r^4, 2^4r^9. С другой стороны, оно равно $2a^4 - 2 = 2(a-1)(a+1)(a^2+1)$. Каждая скобка делится на 2, одна из скобок $(a-1)$ или $(a+1)$ делится на высшую степень двойки, значит, всё число делится на 2^5, и еще не менее чем на два нечетных простых числа. Легко видеть, что ни один из перечисленных вариантов не удовлетворяет этим условиям. Поэтому $M(50) \leq 3$. □

Точные значения $M(k)$ для некоторых конкретных k

Понятно, что для получения точного значения $M(k)$ для данного k достаточно привести пример цепочки последовательных чисел, имеющих по k делителей, длина которой совпадает с оценкой сверху для $M(k)$.

В работе [3] указаны точные значения $M(k)$ для семи четных k. В работе [7] нами найдены точные значения $M(k)$ для еще 55 четных k. На момент написания данной статьи точное значение $M(k)$ установлено для 111 четных k. Соответствующие значения k представлены в таблице 5 (курсивом выделены те значения k, для которых $M(k)$ было известно ранее).

Таблица 5

$M(k)$	k
2	*2*
3	*4*, *10*, *14*, 22, 26, 34, 38, 46, 50, 58, 62, 74, 82, 86, 94, 106, 118, 122, 134, 142, 146, 158, 166, 178, 194, 202, 218, 226, 254, 262, 274, 278, 298, 302, 314, 326, 334, 338, 346, 358, 362, 382, 386, 394, 398, 578, 962, 1394, 1586, 1682, 1898, 2482, 2522, 2738, 2834, 3026, 3298, 3362, 3842, 4082, 4514, 4658, 4706, 5002, 5018, 5402, 5618, 5954, 5986, 6266, 6554, 6562, 7178, 7202, 7298, 7442, 7922, 7954, 8066, 8138, 8194, 8282, 8738, 8762, 8906
5	*6*, 18, 30, 42, 66, 78, 102, 114
7	*8*, *16*, 20, 28, 32, 40, 44, 52, 56, 64, 80, 88, 100, 112, 128, 160, 224

Мы не приводим здесь всех чисел, открывающих соответствующие цепочки, поскольку эти числа весьма велики. Например, наименьшая тройка последовательных чисел, имеющих по 398 натуральных делителей, начинается с числа 385 136 873 654 143 529 320 141 989 778 670 748 713 249 096 486 287 347 579 743 608 301 388 831 546 551 087 575 871 292 121 341 540 480 248 173 428 886 572 737 663 146 519 104 988 029 447 960 814 673 760 503 957 196 893 714 671 801 375 619 055 462 996 814 764 263 903 953 007 319 108 169 802 938 509 890 062 166 509 580 863 811 000 557 423 423 230 896 109 004 106 619 977 392 256 259 918 212 890 623.

Ознакомиться числами, открывающими цепочки из $M(k)$ последовательных чисел, каждое из которых имеет в точности k делителей, для остальных k, представленных в таблице 5, можно в [1].

Отметим, что для всех чисел вида $2p$ в [1] представлены числа, с которых стартуют наименьшие соответствующие цепочки. Подробнее о том, как находились соответствующие числа и как проверялась их минимальность, можно посмотреть в нашей работе [7]. Для других значений k (за исключением нескольких частных случаев) поиск наименьших чисел, открывающих соответствующие цепочки, (или обоснование минимальности найденных) требует очень громоздких вычислений.

Способы построения семерок чисел для тех k, для которых $M(k) = 7$, а также пятерки чисел, каждое из которых имеет 18 делителей, также описаны нами в работе [7].

Тройки последовательных чисел, имеющих по $2pq$ делителей, мы искали, по сути, так же, как тройки чисел, имеющих по $2p$ делителей. Например, тройка чисел, имеющих по 962 делителя, строилась так. На основании Китайской теоремы об остатках существует ровно один класс вычетов p по модулю
$m = (2 \cdot 3)^{36}(11 \cdot 13)^{12}$ такой, что $5^{36} \cdot 7^{12}p \equiv 1(mod\, 2^{36} \cdot 13^{12})$ и $5^{36} \cdot 7^{12}p \equiv 2(mod\, 3^{36} \cdot 11^{12})$. Остается перебирать положительные представители этого класса до тех пор, пока p, $(5^{36} \cdot 7^{12}p - 1)/(2^{36} \cdot 13^{12})$ и $(5^{36} \cdot 7^{12}p - 2)/(3^{36} \cdot 11^{12})$ не станут одновременно простыми.

Для отыскания пятерок последовательных чисел, имеющих по $6p$ делителей, мы использовали вариант распределения множителей, представленный в таблице 4. Каждая из пятерок искалась в виде

$$17^{p-1} \cdot 23^2 q_1,\ 2 \cdot 7^{p-1} q_2^2,\ 3^{p-1} \cdot 19^2 q_3,\ 2^2 \cdot 13^{p-1} q_4,\ 5^{p-1} \cdot 11^2 q_5.$$

Дополнительные фиксированные множители подбирались так, чтобы была разрешима система сравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 7^{p-1}x^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 17^{p-1} \cdot 23^2) \\ 2 \cdot 7^{p-1}x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 3^{p-1} \cdot 19^2) \\ 2 \cdot 7^{p-1}x^2 + 2 \equiv 0\ (mod\ 13^{p-1} \cdot 2^2) \\ 2 \cdot 7^{p-1}x^2 + 3 \equiv 0\ (mod\ 5^{p-1} \cdot 11^2). \end{cases}$$

После чего остается отыскать для одного из решений представитель класса вычетов по модулю $17^{p-1} \cdot 3^{p-1} \cdot 13^{p-1} \cdot 5^{p-1} \cdot 23^2 \cdot 19^2 \cdot 2^2 \cdot 11^2$ такой, что все q_i одновременно просты.

По-видимому, $M(2p) = 3$, для всех простых $p \geq 5$ и $M(k) = 7$ для всех $k > 4$, кратных 4, но не кратных 3. Также вероятно, что $M(2pq) = 3$ для всех p, q, удовлетворяющих условию теоремы 7. Эти предположения станут доказанными утверждениями, если будет доказана гипотеза Диксона [2], обобщающая теорему Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии на случай нескольких прогрессий.

Для обоснования утверждения $M(6p) = 5$ гипотезы Диксона уже недостаточно. Однако, оно будет доказано, если будет доказана гипотеза H (гипотеза Шинцеля [11]), обобщающей гипотезу Диксона на случай многочленов с целыми коэффициентами от целых значений переменной.

Длинные цепочки последовательных чисел, имеющих поровну делителей

Эрдёш (см. [4, B18]) высказал предположение о неограниченности сверху значений $M(k)$. А именно, для любого натурального s найдется подходящее натуральное k, для которого $M(k) \geq s$. В работе [3] показано, что из справедливости гипотезы H следует и справедливость предположения Эрдёша.

Поиск длинных цепочек последовательных чисел, имеющих одинаковое количество делителей, является сложной вычислительной задачей. Так, до того, как мы приступили к нашему исследованию, была известна цепочка, насчитывающая всего 5 чисел, каждое из которых имеет 12 делителей. Мы нашли цепочку из 10 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет в точности натуральных 12 делителей (она начинается числом 1 545 780 028 345 667 311 380 575 449).

Тем самым, доказано, что $10 \leq M(12) \leq 15$.

Нами найдена наиболее длинная (из известных на сегодняшний день) цепочка последовательных натуральных чисел, имеющих поровну делителей. Более точно, нами найдены две таких цепочки. Каждая из них содержит по 14 последовательных чисел (предыдущий «рекорд» – 12 чисел, см. [9]). Первая цепочка начинается с $n = 25\,335\,305\,376\,270\,095\,455\,498\,383\,578\,391\,968$. Это и последующие 13 чисел имеют в точности по 24 делителя. Приведем их канонические разложения:

$n = 2^5 \cdot 61 \cdot 12979152344400663655480729292209$

$n+1 = 3^2 \cdot 7 \cdot 689765384754991004448787003 \cdot 583021$

$n+2 = 11^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 20938268906008343351651556676357$

$n+3 = 17^2 \cdot 59 \cdot 155498048581 \cdot 9555454431512419141$

$n+4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5228116335849669675247480501 \cdot 403831$

$n+5 = 29^2 \cdot 43 \cdot 120911867 \cdot 5794190434730665973813$

$n+6 = 13^2 \cdot 2 \cdot 7971554267985131100516951841 \cdot 9403$

$n+7 = 5^2 \cdot 3 \cdot 1345832954914746106533778676143 \cdot 251$

$n+8 = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 6463088106191350881504689683653$

$n+9 = 19^2 \cdot 223 \cdot 1801797611 \cdot 17466587814783 7039069$

$n+10 = 3^2 \cdot 2 \cdot 1444877153917175031198270547 \cdot 974143$

$n+11 = 31^2 \cdot 751 \cdot 3358367269993 \cdot 10452847875938173$

$n+12 = 2^2 \cdot 5 \cdot 182741560656959 \cdot 6932004215458498961$

$n+13 = 23^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 1451297781764913527839742428733$

Таким образом, $M(24) \geq 14$.

Видно, что в разложении чисел цепочки присутствуют все простые числа, не превосходящие 31. Причем каждый такой множитель хотя бы один раз встречается в степени выше первой. Начальное число и шаг поиска были определены так, чтобы эти условия выполнялись для каждого набора проверяемых чисел. При этом для чисел $n+13$, $n+8$ и $n+2$ каждого набора условиями перебора заранее определены множители, обеспечивающие каждому из этих чисел по 12 делителей. Для того, чтобы эти числа имели по 24 делителя, оставшийся сомножитель каждого из них должен быть большим простым числом. Вероятностные тесты простоты работают очень быстро. Поэтому именно числа на позициях $n+13$, $n+8$ и $n+2$ использовались в качестве первоначального фильтра. А остальные условия последовательно проверялись только при условии успешного преодоления этого фильтра. Отметим, что использование вероятностных тестов простоты не ставит под сомнение найденные цепочки, поскольку найденный набор проверялся детерминированными процедурами.

Для поиска использовалась система компьютерной алгебры, ориентированная на задачи теории чисел, PARI/GP ([10]). Для чисел рассматриваемого диапазона вероятностный тест простоты выполняется в сотни раз быстрее, чем вычисление количества делителей. Может показаться, что, добавляя условия обязательной делимости чисел цепочки на другие простые числа, можно на каждом шаге алгоритма уменьшить количество обращений к функции подсчета числа делителей за счет увеличения количества проверок на простоту и, тем самым, резко повысить эффективность алгоритма. На самом деле, это не так. Добавление новых условий делимости приведет к резкому увеличению шага алгоритма. Поэтому поиск придется вести среди чисел значительно большей значности. Это повлечет резкое замедление подсчета числа делителей. Если же довести количество обязательных делителей до такой ситуации, когда можно будет обойтись вовсе без обращения к функции подсчета числа делителей, используя только проверку на простоту, то исследуемые числа станут огромными, а простота каждого из оставшихся сомножителей очень маловероятной. Вероятность же одновременной простоты всех 14 проверяемых чисел будет мизерной. Количество и распределение обязательных множителей чисел искомой цепочки, приведшее к ее нахождению, было подобрано нами экспериментально. Требуемая цепочка была найдена на 4373940659-м шаге работы алгоритма. Мы убедились, что тут не обошлось без везения, когда нашли вторую подходящую цепочку, затратив на это порядка десяти триллионов шагов (такое количество шагов – наглядное свидетельство высокой производительности системы PARI/GP). Число, открывающее вторую цепочку приведено в [7].

Литература

1. Приложение к задаче ММ77 [Электронный ресурс]. Математический марафон. URL: http://www-old.fizmat.vspu.ru/doku.php
?id=marathon:mm_77_appendix
2. Dickson, L. E. A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers // Messenger of mathematics, 33 (1904): 155–161.
3. Düntsch, I., Eggleton R. B. Equidivisible consecutive integers – 1990, [Электронный ресурс]. URL: http://www.cosc.brocku.ca/~duentsch
/archive/equidiv.pdf
4. Guy, R. Unsolved problems in number theory, Third edition – Springer, 2004.
5. Heath-Brown, D.R. The divisor function at consecutive integers // Mathematika, 31 (1984), 141-149.
6. Hildebrand, A. The divisor function at consecutive integers // Pacific Journal of Mathematics, Vol. 129. No 2, 1987, 307-318.
7. Letsko, V. Some new results on consecutive equidivisible integers // arXiv: math.NT/1510.07081v1 (2015)
8. Mihăilescu, P. Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture // preprint (2002), submitted.
9. B. Mishutka. Extending sequence in Guy's problem B18 – NMBRTHRY maillist, 2006, [электронный ресурс]. URL: https://listserv.nodak.edu/ cgi-bin/wa.exe?A2=ind0612&L=NMBRTHRY&F=&S=&P=18233
10. PARI/GP официальный сайт, [Электронный ресурс]. URL: http://pari.math.u-bordeaux.fr/download.html
Sierpinski, W. Elementary theory of numbers – North Holland, 2nd edition (1988).

About the successive natural numbers with the equal number of devisors

The authors consider the chain of successive natural numbers with fixed number of devisors.
The estimations of such chains are improved. There are 14 successive numbers; each of them has exactly 24 devisors.

Key words: *number of devisors, successive natural numbers, equidivisible numbers.*