Электронный научно-образовательный журнал ВГСПУ «Грани познания».
№ 3(74). 20 июля 2021 ■ www.grani.vspu.ru

Математические науки

УДК 372.851

О.В. РОЖКОВА
(Волгоград)

АЛГОРИТМ ВЫБОРА МЕТОДА РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматриваются различные методы решения тригонометрических уравнений и способы систематизировать знания учащихся путем использования алгоритма выбора метода решения тригонометрических уравнений. Представлен алгоритм выбора метода решения тригонометрических уравнений в виде блок-схемы, а также методические указания по его использованию.

Ключевые слова: *тригонометрия, тригонометрические уравнения, решение тригонометрических уравнений, методы решения тригонометрических уравнений, алгоритм выбора метода решения тригонометрических уравнений.*

OLESYA ROZHKOVA
(Volgograd)

SELECTION ALGORITHM OF THE METHOD FOR SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS

The article deals with the different methods for solving the trigonometric equations and the ways of systemizing the students' knowledge by the use of the selection algorithm of the method for solving the trigonometric equations. There is presented the selection algorithm of the method for solving the trigonometric equations in the form of the functional diagram and the methodological recommendations of its usage.

Key words: *trigonometry, trigonometric equations, solving trigonometric equations, methods for solving trigonometric equations, selection algorithm of the method for solving the trigonometric equations.*

В настоящее время большой популярностью среди выпускников школ пользуется выбор ЕГЭ по профильной математике. Одним из наиболее часто встречающихся заданий в письменной части экзамена являются решения тригонометрического уравнения. Ни для кого не секрет, что успех в решении подобного рода уравнения дает возможность получить более высокий балл, поэтому учащиеся при подготовке к ЕГЭ стараются разобраться в тригонометрии, а особенно в методах решения тригонометрических уравнений. В старших классах за короткий срок необходимо максимально подробно разобрать методы решения тригонометрических уравнений. После того, как учащиеся научатся решать уравнения различными способами, необходимо научиться определять, какой из методов решения наиболее целесообразен, для этого было бы полезно иметь некий алгоритм выбора метода решения тригонометрического уравнения.

Цель исследования заключается в разработке алгоритма выбора метода решения тригонометрического уравнения. Перед тем как говорить об обучении решению тригонометрических уравнений, необходимо разобраться в разнообразии методов их решения. Анализ учебной литературы по алгебре за 10–11 класс показал, что более подробное изложение методов решения тригонометрических уравнений представлено в учебниках для углубленного уровня изучения алгебры и начала математического анализа. Нами был составлен перечень основных методов решения тригонометрических уравнений и их особенностей.

Стандартные методы решения тригонометрических уравнений:

1. Замена переменной

Суть метода состоит в том, чтобы, путем замены переменной, получить квадратное уравнение, которое легко разрешимо. Получив корни квадратного уравнения, происходит сведение начального уравнения к простейшим.

Данный метод используется при решении однородных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$3 + \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0$$

Решение: Применим формулу косинуса двойного угла.

$$3 + 2\text{sos}^2 x - 1 + 3\sqrt{2}\cos x = 0,$$

$$2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0.$$

Заменим cos x на t, и придем к квадратному уравнению.

$$2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0,$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, t_2 = -\sqrt{2}$$

Возвращаемся к исходному уравнению.

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \; x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

$\cos x = -\sqrt{2}$ (корней нет, так как $-\sqrt{2} < -1$)

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

2. Метод решения уравнения с помощью тригонометрического тождества

Рекомендуется использовать при решении неоднородных уравнений, при решении которых есть возможность воспользоваться формулами приведения.

Пример 2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0$$

Решение: Сведение к квадратному уравнению относительно sinx:

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \;,\; 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Далее воспользуемся методом введения новой переменной.

3. Разложение на множители

Данным методом можно разложить уравнение на составные части, которые представляют собой совокупность более простых уравнений. Целесообразно использовать, если в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части – ноль.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos x$$

Решение: По формуле двойного угла

$$2\sin x\cos x = \cos x,$$

$$2\sin x\cos x - \cos x = 0,$$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0,$$
$$\cos x = 0 \text{ или } 2\sin x - 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$
$$x_2 = (-1)^n + \pi n, n \in Z.$$

Решение уравнений с помощью единичной окружности

Удобно решать уравнения вида: $\sin x = m, \cos x = n, tgx = c$, в случае, когда переменные представляют собой табличные значения. Данный метод удобен своей наглядностью, решение уравнений находят при помощи единичной окружности (см. рис. 1).

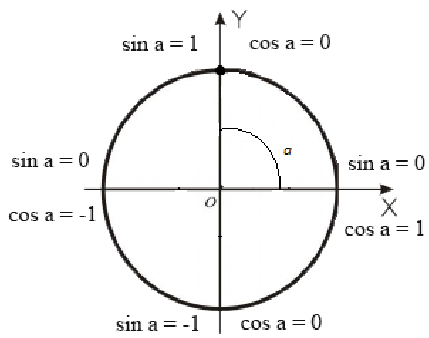

Рис. 1. Единичная окружность

Пример 4. Sint =1

Решение. Так как синус – это ордината точки, то ординату, равную 1 имеет только точка B $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *чтобы вернуться в данную точку нужно сделать полный круг равный* 2π.

Ответ: $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$ [1]

5. Функционально-графический способ

При изображении решений простейших тригонометрических уравнений иногда используют графики простейших тригонометрических функций. Для нахождения решения тригонометрического уравнений при этом подходе требуется схематичное построение графика простейшей тригонометрической функции и применение формул корней соответствующих уравнений (см. рис. 2, 3 на с. 23).

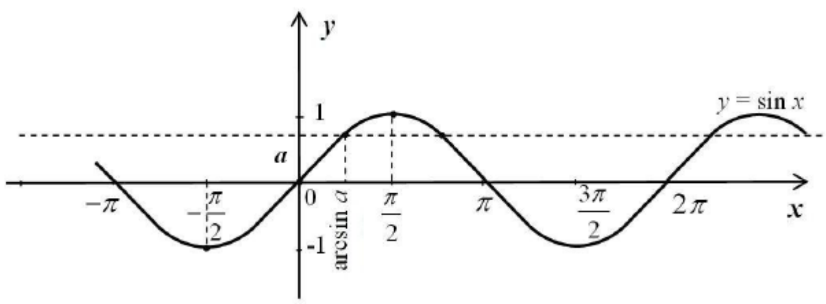

Рис. 2. $y = \sin x$

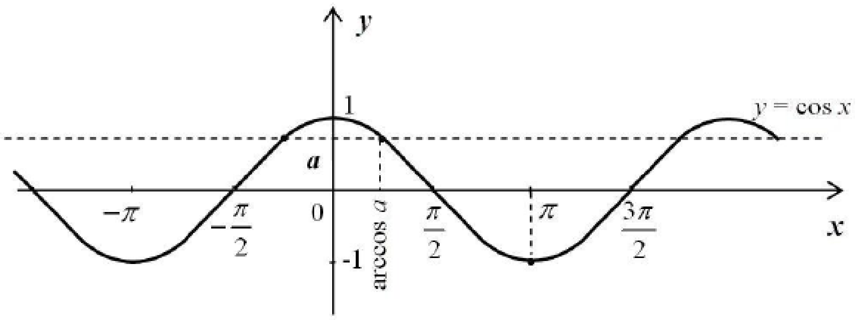

Рис. 3. $y = \cos x$

Пример 5. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение: Схематично изобразим графики функций $y = sinx, y = \frac{1}{2}$ *(см. рис. 4). Для уравнения* $sin\ x = \frac{1}{2}$ *запишем общее решение* $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ *(см. рис. 4).*

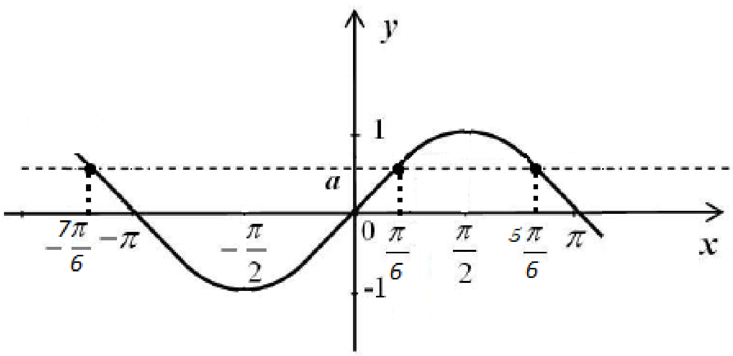

Рис. 4. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Подставляя последовательно вместо *n* значения: -1, 0, 1, получим корни уравнения: $-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. [4]

6. Комбинирование методов

В данном случае при решении уравнения невозможно использовать только один метод решения уравнения, поэтому необходимо их комбинировать.

Методы, которые присутствуют в учебниках для углубленного изучения алгебры:

7. Приведение к однородному уравнению второй степени

Уравнение, левая часть которого – многочлен, каждый член которого имеет вторую степень, а правая – нуль, называют однородным уравнением второй степени относительно переменных u, v. Получим уравнение $au^2 + buv + cv^2 = 0$. Такое уравнение сводится к квадратному делением на v^2 относительно $\frac{u}{v}$.

Рекомендуется применять в случаях, когда уравнение неоднородное и имеет вид: $au^2 + buv + cv^2 = 0.$ [2]

Пример 6. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Решение: Рассмотрим случай, когда $\cos x \neq 0$.

Поделим уравнение на $\cos^2 x$.

$2tg^2 x - 3tg\ x - 5 = 0.$

Решение данного уравнения свелось к решению методом замены переменной.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi n, n \in Z.$

8. Введение вспомогательного угла

Данный метод позволяет заменить синусом или косинусом выражение $a\sin x + b\cos x.$ Для этого надо добиться, чтобы коэффициенты синуса и косинуса являлись соответственно косинусом и синусов некоторого угла, т. е. чтобы сумма их квадратов оказалась равной единице. Введение вспомогательного угла особенно удобно, когда вспомогательный угол табличный [5].

Пример 7. Решить уравнение: $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1,$ имеем $\sqrt{1+3} = 2$.

Решение:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x_1 = 2\pi n, x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

9. Использование формул понижения степени

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2},$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$$

Решение:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$$

$$\cos 4x + 2\cos 4x\cos 2x = 0$$

$$2\cos 4x\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Далее решить систему уравнений [2].

10. Условие равенства одноименных функций

$$sin\ \alpha = sin\beta: \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n \\ \alpha = -\beta + (2\pi + 1)\pi \end{cases}, n \in Z.$$

$$cos\alpha = cos\beta: \begin{cases} \alpha = +\beta + 2\pi n, n \in Z \\ \alpha = -\beta + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$$

$$tg\alpha = tg\beta, ctg\alpha = ctg\beta: \alpha = \beta + \pi n, n \in Z.$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin 4x = \cos x$$

Решение:

$$\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} 4x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi(2n + 1) \\ 4x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\pi n \end{cases}$$

Далее преобразовывая уравнения получаем систему корней уравнений.

11. Замена неизвестного $\boldsymbol{t = \sin x + \cos x}$

Данным методом целесообразно решать уравнения, в которые входят выражения $sin\ x + cos\ x$ и $sin2x$. Их удобно решать при помощи замены неизвестного $sin\ x + cos\ x = t$, т. к. при этом

$$sin2\ x = 2sin\ x\ cos\ x = sin^2 x + 2sin\ x\ cos\ x + cos^2 x - 1 = (sin\ x + cos\ x)^2 - 1 = t^2 - 1.$$

Пример 10. Решить уравнение

$$sin^2 x - 4sinx = 4 + 4cosx.$$

Решение:

$$4(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cos x + 4 = 0$$

Введем новую переменную

$$\sin x + \cos x = t,$$

$$2\sin x \cos x = t^2 - 1$$

Получим

$$4t - (t^2 - 1) + 4 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим корни и сделаем обратную подстановку [5].

Таким образом, были перечислены некоторые основные методы решения тригонометрических уравнений. Наша работа нацелена на повышение уровня знаний учащихся для решения тригонометрических уравнений, встречающихся в ЕГЭ по профильной математике, поэтому, можно сказать, что вышеперечисленных методов достаточно для подготовки к ЕГЭ.

Чтобы процесс обучения методам решения тригонометрических уравнений был более эффективен, необходимо учитывать возможность и целесообразность использования методов решения тригонометрических уравнений. Для того, чтобы облегчить процесс выбора метода решения уравнения был разработан алгоритм выбора метода решения тригонометрических уравнений (см. рис. 5).

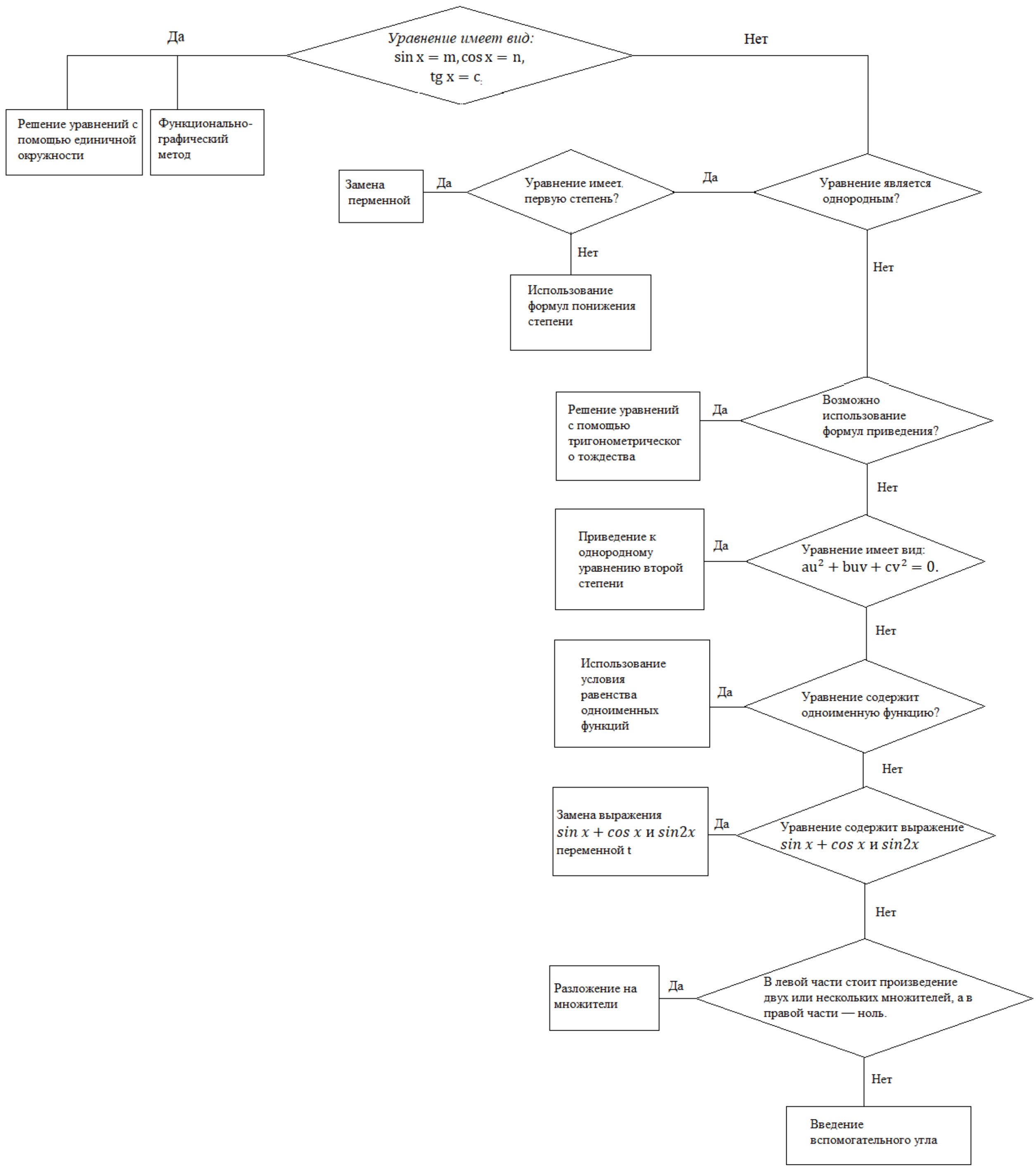

Рис. 5. Алгоритм выбора метода решения тригонометрических уравнений

Для того, чтобы использование алгоритма выбора было наиболее эффективно целесообразно воспользоваться некоторыми методическими указаниями:

1. Использование алгоритма возможно только после изучения учащимися методов решения тригонометрических уравнений.

2. Перед началом работы с алгоритмом необходимо актуализировать знания учащихся по теме «Алгоритмы», для того чтобы старшеклассники вспомнили принцип построения алгоритмов и работы с ними.

3. Учителю необходимо четко и доступно объяснить принцип работы с алгоритмом выбора метода решения тригонометрических уравнений, объяснить в каких случаях необходимо переходить по линиям с ответом «Да» и «Нет».

4. После того, как алгоритм приводит в конкретному методу решения тригонометрического уравнения, учащимся следует решить уравнение выбранным способом.

5. Если метод, который выбрал учащийся не подошел для решения уравнения, необходимо вернуться в самое начало алгоритма и еще раз внимательно перейти по стрелкам алгоритма.

6. Стоит помнить о том, что разработанный алгоритм содержит основные методы решения тригонометрических уравнений, но существует масса частных методов, которые не входят в алгоритм.

Таким образом, учащиеся получат четкий алгоритм выбора метода решения тригонометрических уравнений, с помощью которого без труда получится определить необходимый метод решения. Данная разработка несколько повысит скорость и качество решения тригонометрических уравнений у старшеклассников.

Литература

1. Алимов Ш.А., Калягин Ю.М., Ткачева М.В. [и др.]. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс. Базовый уровень. М.: Просвещение, 2012.

2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. М.: Мнемозина, 2014.

3. Захарова О.В. Основные методы решения тригонометрических уравнений/ Волгоград: Волгоград. науч. изд-во, 2010.

4. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика: подготовка к ЕГЭ: тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней: типовые задания С1. Ростов н/Д: Легион, 2012.

5. Муравин Г.К., Муравина О.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. М.: Дрофа, 2013.

6. Шаталов В.Ф. Быстрая Тригонометрия. М.: ГУП ЦРП «Москва–Санкт-Петербург», 2002.