

О.А. МАСЛОВА
(Волгоград)

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ФОРМИРОВАНИИ МЕТОДИЧЕСКИХ УМЕНИЙ РАБОТАТЬ С МАТЕМАТИЧЕСКИМИ УТВЕРЖДЕНИЯМИ

Анализируются возможности курса математической логики в формировании методических умений учителя математики. Выделены умения, определяющие готовность выполнять логико-математический анализ математических утверждений (понятий, теорем) и конструировать задачи в соответствии с целями этапов формирования понятия и процесса изучения теорем.

Ключевые слова: высказывание, логические операции, математическая логика, методическое умение, понятие, предикат, теорема.

Проблема методической подготовки студентов педагогических вузов в ходе изучения дисциплин математического цикла не является новой. Так, С.Н. Горлова исследовала проблемы формирования методических умений у будущих учителей математики в процессе изучения алгебры [3]; Н.П. Рыжова рассматривала взаимосвязь специальной и методической подготовки в процессе преподавания спецкурса по алгебре и теории чисел [7]; Н.С. Симонова раскрыла особенности предметно-методической подготовки будущего учителя математики при изучении курса «Числовые системы» [8]; И.А. Дудковская проектировала курс математической логики, используя при этом технологию В.М. Монахова с целью улучшения качества подготовки по этой дисциплине и повышения уровня сформированности компетентности будущих учителей математики [4].

Анализ учебно-методической литературы [3; 4; 6; 9; 10] позволил сделать вывод о том, что умение выполнять логико-математический анализ некоторой единицы учебного материала (понятия, теоремы, задачи, темы) – одно из основных методических умений учителя математики, лежащее в основе организации всего процесса обучения учащихся новому материалу.

Рассмотрим возможности курса математической логики в формировании данного умения. Для этого выделим типовые упражнения в содержании практикума курса математической логики по темам основных разделов. Поставим в соответствие данным упражнениям умения, определяющие готовность выполнять логико-математический анализ некоторой единицы учебного материала (см. табл. на с. 21).

Из приведенной ниже таблицы видно, что содержание практикума курса математической логики позволяет формировать умения, в большей степени определяющие готовность выполнять логико-математический анализ понятий и теорем, т.е. такие умения, как:

- выполнение логического анализа структуры определения, теоремы;
- запись определения математического понятия, теоремы на языке математической логики;
- распознавание объектов, принадлежащих данному понятию;
- преобразование логической структуры определения математического понятия, теоремы, в том числе с целью перевода в имплицитивную форму;
- построение отрицания определения математического понятия;
- проверка определения математического понятия, теоремы на соответствие требованиям корректности к нему;
- выделение необходимых и достаточных условий теоремы;
- формулировка утверждений: обратного, противоположного и обратного противоположному (определение их истинностного значения).

На наш взгляд, методическое умение выполнять логико-математический анализ математического утверждения лежит в основе не только подготовки учителя к введению нового учебного материала (понятия, теоремы), но и организации процесса его изучения. При подготовке к введению нового учебного материала учитель должен владеть всеми вышеперечисленными умениями, т.е. самостоятельно выполнять логико-математический анализ единицы учебного материала.

Анализ возможностей курса математической логики в формировании умения выполнять логоико-математический анализ учебного материала

Единица учебного материала	Содержание практикума курса математической логики по темам основных разделов (типовые упражнения)	Умения, определяющие готовность выполнять логоико-математический анализ некоторой единицы учебного материала
Алгебра высказываний		
Понятия, теоремы, задачи	<i>Понятие высказывания. Операции над высказываниями</i> Упражнения: – установление истинностного значения высказывания с предварительным выделением в нем элементарных высказываний; – выполнение логических операций над высказываниями	– умение выполнять логический анализ структуры определения, теоремы, задачи; – умение записывать определения математического понятия, теоремы и задачи на языке математической логики
Понятия, теоремы	<i>Равносильные преобразования формул</i> Упражнения: – упрощение формул посредством равносильных преобразований; – определение вида формулы после ее упрощения	– умение преобразовывать логическую структуру определения математического понятия, теоремы, в том числе с целью перевода его в имплицативную форму; – умение строить отрицание определения математического понятия; – умение формулировать утверждения: обратное, противоположное и обратное противоположному
Понятия	<i>Логическое следование формул</i> Упражнения: – доказательство выполнения логического следования различными способами; – установление выполнения логического следования	– умение проверять определения математического понятия на соответствие требованиям корректности к нему (избыточность, противоречивость)
Теоремы	<i>Прямая, обратная, противоположные теоремы. Необходимые и достаточные условия</i> Упражнения: – формулирование утверждений: обратного, противоположного и обратного противоположному, установление их истинностного значения; – выделение необходимых и достаточных условий в утверждении	– умение формулировать утверждения: обратное, противоположное и обратное противоположному; – умение выделять необходимые и достаточные условия теоремы
Понятия, теоремы, задачи	<i>Решение логических упражнений</i> Упражнения: – решение логических упражнений посредством их записи на языке алгебры высказываний с последующим упрощением и трактовкой полученного результата	– умение выполнять логический анализ структуры определения, теоремы, задачи; – умение записывать определение математического понятия, теоремы и задачи на языке математической логики; – умение преобразовать логическую структуру определения математического понятия, теоремы, в том числе с целью перевода его в имплицативную форму
Логика предикатов		
Понятия	<i>Понятие предиката. Области истинности и ложности предиката. Логические и кванторные операции над предикатами</i> Упражнения: – нахождение области истинности; – выполнение логических и кванторных операций над предикатами с последующим нахождением их областей истинности	– умение распознавать объекты, принадлежащие понятию; – умение проверять определения математического понятия на соответствие требованиям корректности к нему (соразмерность, внутренняя непротиворечивость)
Понятия, теоремы	<i>Равносильность предикатов, логическое следование</i> Упражнения: – установление равносильности предикатов; – установление выполнения логического следования предикатов	– умение устанавливать эквивалентность определений, теорем
Понятия, теоремы	<i>Равносильные формулы логики предикатов. Свойства отношения равносильности формул</i> Упражнения: – упрощение формулы посредством равносильных преобразований; – определение вида формулы после ее упрощения; – приведение формул к (предваренной) нормальной форме	– умение преобразовывать логическую структуру определения математического понятия, теоремы, в том числе с целью перевода его в имплицативную форму; – умение строить отрицание определения математического понятия; – умение формулировать утверждения: обратное, противоположное и обратное противоположному

Единица учебного материала	Содержание практикума курса математической логики по темам основных разделов (типовые упражнения)	Умения, определяющие готовность выполнять логико-математический анализ некоторой единицы учебного материала
Понятия, теоремы	<i>Логическое следование формул</i> Упражнения: – доказательство логического следования различными способами	– умение проверять определения математического понятия на соответствие требованиям корректности к нему (избыточность)
Понятия, теоремы	<i>Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, определений, построения отрицания предложений</i> Упражнения: – запись определений математических понятий, теорем на языке логики предикатов; – построение отрицания математических утверждений с использованием его записи на языке логики предикатов	– умение выполнять логический анализ структуры определения, теоремы; – умение записывать определение математического понятия, теоремы на языке математической логики; – умение строить отрицание определения математического понятия
Единица учебного материала	Содержание практикума курса математической логики по темам основных разделов (типовые упражнения)	Умения, определяющие готовность выполнять логико-математический анализ некоторой единицы учебного материала
Понятия, теоремы	<i>Логическое следование формул</i> Упражнения: – доказательство логического следования различными способами	– умение проверять определения математического понятия на соответствие требованиям корректности к нему (избыточность)
Понятия, теоремы	<i>Применение языка логики предикатов для записи математических предложений, определений, построения отрицания предложений</i> Упражнения: – запись определений математических понятий, теорем на языке логики предикатов; – построение отрицания математических утверждений с использованием его записи на языке логики предикатов	– умение выполнять логический анализ структуры определения, теоремы; – умение записывать определение математического понятия, теоремы на языке математической логики; – умение строить отрицание определения математического понятия

При этом, как отмечается в работах [1; 2], организация процесса изучения нового учебного материала зависит от сформированности у учителя умений конструировать задачи в соответствии с целями этапов формирования понятия и процесса изучения теорем (задачи на построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам; распознавание объектов, принадлежащих объему понятия; составление родословной понятий; выведение следствий из условия теоремы и т.д.). Приведем примеры упражнений из курса математической логики, решение которых направлено на формирование некоторых из приведенных выше умений.

Умение выполнять логический анализ определения математического понятия. Выявление родового понятия, существенных свойств и логических связей между ними сопряжено с элементами лингвистического анализа текста определения, т.е. с выявлением присутствующих в тексте логических союзов и восполнением отсутствующих, а также установлением сфер действия этих союзов.

Упражнение. В следующем высказывании выделите элементарные и определите логические связки между ними: «Если две прямые a и b в пространстве не совпадают, не параллельны, не пересекаются, то они скрещивающиеся».

Решение. Запятая соответствует союзу «и», который ассоциируется с операцией конъюнкцией. Частица «не», в свою очередь, ассоциируется операцией отрицания. Предложение вида «если ..., то...» соответствует операции импликации, причем то, что записано до запятой является посылкой, а то, что после – заключением. В результате лингвистического анализа предложения, интегрированного в процесс его логического анализа, были выделены следующие элементарные высказывания: А «Две прямые a и b в пространстве совпадают», В «Две прямые a и b в пространстве параллельны», С «Две прямые a и b в пространстве пересекаются» и D «Две прямые a и b в пространстве скрещивающиеся». Логические связки между ними будут следующими: конъюнкция отрицаний высказываний А, В и С является посылкой импликации, а D – ее заключением.

Умение выделять необходимые и достаточные условия теоремы. Учитель обязан грамотно формулировать утверждения с точки зрения необходимых и достаточных условий. К типичным

ошибкам студентов (будущих учителей математики) при работе с теоремами можно отнести «подмену» понятий необходимого и достаточного условий. Например, условие «две прямые в пространстве не пересекаются» является необходимым, но не достаточным условием параллельности прямых в пространстве, поэтому его нельзя использовать в качестве единственного условия в определении параллельных прямых в пространстве. В то же время «принадлежность векторов одной прямой» выступает достаточным условием их коллинеарности, но не является необходимым, поскольку коллинеарность векторов не влечет их принадлежности одной прямой. Для учителя математики важно уметь безошибочно определять необходимость и достаточность какого-либо условия, в том числе и для грамотного построения собственных высказываний. К примеру, высказывание «для того чтобы векторы были коллинеарными, необходимо, чтобы они принадлежали одной прямой» неверное, нужно заменить «необходимо» на «достаточно». Высказывание «для того чтобы векторы принадлежали одной прямой, достаточно, чтобы они были коллинеарными» также неверно, здесь требуется заменить «достаточно» на «необходимо».

Упражнение. В предложениях вместо пропусков вставить «необходимо» или «достаточно» с целью получения истинного высказывания (в скобках указаны верные ответы):

- а) Для параллельности прямых в пространстве ..., чтобы они не пересекались (необходимо);
- б) Для равносильности двух систем ..., чтобы каждое решение одной из них было решением и второй (достаточно);
- в) Для равенства двух векторов ..., чтобы их длины совпадали (необходимо).

Для развития умений составлять задачи, обеспечивающие этапы изучения теоремы, предлагаем студентам сконструировать систему упражнений по теме «Параллелограмм и его свойства» на выделение необходимых и достаточных условий.

Умение преобразовывать логическую структуру теоремы. Процедура равносильного преобразования формулировок теорем крайне важна в практике в арсенале преподавателя. Она помогает рассмотреть, по существу, одну и ту же теорему с различных логических точек зрения.

Существует множество школьных учебников по алгебре и геометрии, в которых по-разному формулируются одни и те же теоремы по содержанию (смыслу), поэтому учитель математики обязан уметь формулировать теорему в различных формах, определять эквивалентность этих форм. Кроме того, он обязан уметь выявлять и исправлять структурные ошибки при формулировании теорем самими учениками. С целью формирования умения устанавливать эквивалентность теорем посредством преобразования их логической структуры у будущих учителей математики на занятиях по математической логике можно выполнять, к примеру, следующие упражнения.

Упражнение. Предварительно записав следующие утверждения на языке логики предикатов, докажете их эквивалентность:

- а) 1. Если натуральное число делится и на 2, и на 5, то оно делится на 10.
- 2. Если натуральное число кратно 2, то из кратности его числу 5 следует, что данное число кратно 10.

Решение. Введем следующие обозначения одноместных предикатов, заданных на множестве натуральных чисел: $A(x)$: 'x делится на 2', $B(x)$: 'x делится на 5', $C(x)$: 'x делится на 10'. Согласно введенным обозначениям предложения 1 и 2 имеют следующие структуры $(A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x))$ и $(A(x) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow C(x)))$ соответственно. Проверим равносильность формул:

$$A \wedge B \Rightarrow C \equiv \neg (A \wedge B) \vee C \equiv (\neg A \vee \neg B) \vee C \equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \equiv \neg A \vee (B \Rightarrow C) \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C).$$

- б) 1. Две различные прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны.
- 2. Из того, что две различные прямые на плоскости не пересекаются, следует их параллельность.

Решение. Введем следующие обозначения двухместных предикатов, заданных на множестве всех прямых некоторой плоскости: $A(x,y)$: 'прямые x и y различны', $B(x,y)$: 'прямые x и y пересекаются',

$C(x,y)$: 'прямые x и y параллельны'. Согласно введенным обозначениям предложения 1 и 2 имеют следующие структуры $(A(x,y) \Rightarrow (B(x,y) \vee C(x,y)))$ и $((A(x,y) \wedge \neg B(x,y)) \Rightarrow C(x,y))$.

Проверим равносильность формул:

$$A \Rightarrow (B \vee C) \equiv \neg A \vee (B \vee C) \equiv (\neg A \vee B) \vee C \equiv \neg(\neg A \vee B) \Rightarrow C \equiv (A \wedge \neg B) \Rightarrow C.$$

По мнению В.И. Игошина [3], выявляя структуру математических утверждений и преобразовывая ее равносильным образом, преподаватель быстрее подключает к работе мыслительные механизмы подсознания (интуиции) для поиска путей доказательства теоремы (решения задачи). Таким образом, чем больше усвоено логических равносильности, тем выше логическая культура учителя.

Согласно концепции профессионально-педагогической направленности обучения математике будущих учителей, автором которой является А.Г. Мордкович, каждый предмет, изучаемый в вузе, должен вносить вклад в решение проблемы совершенствования подготовки будущих учителей, теперь уже бакалавров педагогического образования. Анализ возможностей курса математической логики в формировании методических умений у будущих учителей математики показал, что содержание практикума этого курса может стать мощным средством формирования готовности выполнять логико-математический анализ математических утверждений (понятий, теорем) и конструировать задачи в соответствии с целями этапов формирования понятия и изучения теорем.

Литература

1. Астахова Н.А. Обучение студентов составлению задач как средство становления профессиональных качеств будущего учителя // Актуальные психолого-педагогические проблемы подготовки специалиста : материалы Всерос. науч.-практ. конф. Уфа : Изд-во «Гилем», 2005. С. 210–214.
2. Астахова Н.А. Обучение студентов составлению математических задач как средство формирования специальных умений по их решению // Изв. Волгогр. гос. пед. ун-та. Сер. : Пед. науки. 2008. № 9 (33). С. 204–207.
3. Горлова С.Н. Формирование методических умений будущего учителя математики в процессе изучения курса алгебры педвуза : дис. ... канд. пед. наук. Нижневартовск, 2003.
4. Дудковская И.А. Проектирование курса математической логики с целью формирования компетентности будущих учителей математики : дис. ... канд. пед. наук. Новосибирск, 2004.
5. Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики. Саратов : Изд. центр «Наука», 2009.
6. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобков, Т.Ф. Кириченко [и др.]; под ред. Е.И. Лященко. М. : Просвещение, 1988.
7. Рыжова Н.П. Взаимосвязь специальной и методической подготовки при изучении алгебры и теории чисел в педагогическом институте : автореф. дис. ... канд. пед. наук. Новосибирск, 1994.
8. Симонова Н.С. Предметно-методическая подготовка будущего учителя математики при изучении курса «Числовые системы» в педвузе : дис. ... канд. пед. наук. Тольятти, 2003.
9. Ткаченко К.И. Теоретические основы формирования методических умений студентов в ходе обучения элементарной математике в педвузе : дис. ... канд. пед. наук. М., 2000.
10. Чикунова О.И. Формирование методических умений будущих учителей в процессе работы над задачей в курсах математических дисциплин педвуза : дис. ... канд. пед. наук. Екатеринбург, 1998.

Analysis of the potential of the mathematical logics course in formation of methodological skills of work with mathematical statements

There is analyzed the potential of the mathematical logics course in formation of methodological skills of a maths teacher. There are sorted out the skills that determine the readiness to carry out the logical and mathematical analysis of mathematical statements (notions, theorems) and to construct the tasks in accordance with the objectives of the stages of notion formation and theorems study.

Key words: *expression, logical operations, mathematical logics, methodological skill, notion, predicate, theorem.*